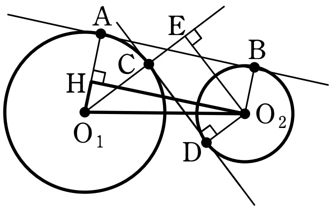
近畿大学医学部　推薦入試対策問題　全学部共通版1

1 (1)解答　(ア)　8　　(イ)$\sqrt{(ウ)}$　$4\sqrt{6}$　　(エ)　8　　(オ)　6

(2)解答　(アイウ)　720　　(エ)　5　　(オカキクケ)　40320

(3)解答　(ア)　4　　(イ)　2　　(ウ)　2　　(エ)　6　　$\dfrac{(オ)}{(カ)}$　$\dfrac{2}{3}$　　$\dfrac{(キ)}{(ク)}$　$\dfrac{5}{6}$

$\dfrac{(ケ)}{(コ)}$　$\dfrac{4}{3}$



(1)O_1 と O_2 が互いに外部にあるから　　$d>5+3$

すなわち　　$d>{}^{ア}8$

$d=10$ のとき，O_2 から AO_1 に垂線 O_2H を下ろすと，

四角形 AHO_2B は長方形となるから　　$AB=HO_2$

ここで，$\triangle O_1O_2H$ において，三平方の定理により

$$HO_2{}^2=O_1O_2{}^2-HO_1{}^2=d^2-(5-3)^2=10^2-2^2=96$$

$HO_2>0$ であるから　　$HO_2=4\sqrt{6}$

したがって　　　　　$AB={}^{イ}4\sqrt{{}^{ウ}6}$

また，四角形 CDO_2E も長方形であるから　　$CD=EO_2$

ここで　　$O_1E=O_1C+CE=O_1C+DO_2=5+3={}^{エ}8$

よって，$\triangle O_1O_2E$ において，三平方の定理により

$$EO_2{}^2=O_1O_2{}^2-O_1E^2=10^2-8^2=36$$

$EO_2>0$ であるから　　$EO_2=6$　　　　したがって　　$CD={}^{オ}6$

(2)　$(3x+2y)^5$ の展開式における一般項は

$${}_5C_r(3x)^{5-r}(2y)^r={}_5C_r3^{5-r}2^rx^{5-r}y^r$$

x^2y^3 となるのは $r=3$ のときで，その係数は

$${}_5C_3\cdot3^2\cdot2^3=10\cdot9\cdot8={}^{アイウ}720$$

$\{(3x+2y)+z\}^8$ を展開したとき，z^3 の項をまとめると

$${}_8C_3(3x+2y)^{8-3}z^3={}_8C_{{}^{エ}5}(3x+2y)^5z^3$$

で表される。

$(3x+2y)^5$ の展開式で x^2y^3 の係数は 720 であるから，$(3x+2y+z)^8$ の展開式で $x^2y^3z^3$ の係数は

$${}_8C_5\times720=56\times720={}^{オカキクケ}40320$$

別解　$(3x+2y+z)^8$ の展開式の一般項は

$$\frac{8!}{p!q!r!}(3x)^p(2y)^qz^r=\frac{8!}{p!q!r!}3^p2^qx^py^qz^r$$

$x^2y^3z^3$ となるのは $p=2$，$q=3$，$r=3$ のときで，その係数は

$$\frac{8!}{2!3!3!}\cdot3^2\cdot2^3=560\cdot9\cdot8={}^{オカキクケ}40320$$

(3) 与えられた不等式から　　$2\sin x\cos x>\sqrt{2}\left(\cos x\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin x\sin\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{1}{2}$

よって　　$2\sin x\cos x>\cos x-\sin x+\dfrac{1}{2}$

$a=\sin x$，$b=\cos x$ とおくと　　$2ab>b-a+\dfrac{1}{2}$

すなわち　　${}^{ア}4ab+{}^{イ}2a-{}^{ウ}2b-1>0$

$$4ab+2a-2b-1=2a(2b+1)-(2b+1)$$
$$=(2a-1)(2b+1)$$

したがって　　$(2a-1)(2b+1)>0$

よって　　$\begin{cases}2a-1>0\\2b+1>0\end{cases}$ または $\begin{cases}2a-1<0\\2b+1<0\end{cases}$

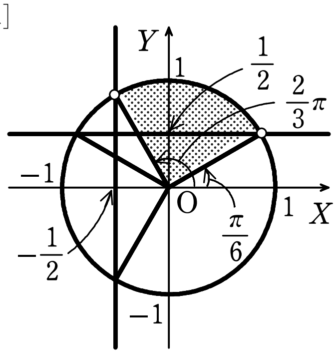
ゆえに　　$a>\dfrac{1}{2}$ かつ $b>-\dfrac{1}{2}$　……①　または　$a<\dfrac{1}{2}$ かつ $b<-\dfrac{1}{2}$　……②

$0\leqq x<2\pi$ において，① を満たす x の範囲は，図 [1] より　$\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{2}{3}\pi$

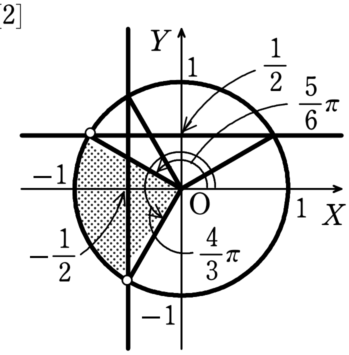
② を満たす x の範囲は，図 [2] より　$\dfrac{5}{6}\pi<x<\dfrac{4}{3}\pi$

よって，求める x の範囲は　　$\dfrac{\pi}{{}^{エ}6}<x<\dfrac{{}^{オ}2}{{}^{カ}3}\pi$　または　$\dfrac{{}^{キ}5}{{}^{ク}6}\pi<x<\dfrac{{}^{ケ}4}{{}^{コ}3}\pi$

[1]



[2]

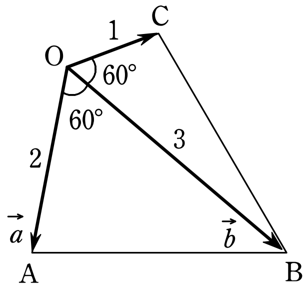


2 解答　(ア)　3　　$\dfrac{(イ)}{(ウ)}$　$\dfrac{7}{4}$　　(エ)　2　　$\sqrt{(オ)}$　$\sqrt{3}$　　(カ)　0　　$\dfrac{(キ)}{(ク)}$　$\dfrac{1}{4}$

$\dfrac{(ケ)\sqrt{(コ)}}{(サ)}$　$\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$　　$\dfrac{\sqrt{(シ)}}{(ス)}$　$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　$\dfrac{\sqrt{(セ)}}{(ソ)}$　$\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ から

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=2\cdot3\cdot\frac{1}{2}={}^{ア}3$$



$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\dfrac{5}{4}$　……① から

$$(\vec{a}-\vec{p})\cdot(\vec{b}-\vec{p})=\frac{5}{4}$$

ゆえに　　$|\vec{p}|^2-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{p}+\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{5}{4}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$ を代入して　　$|\vec{p}|^2-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{p}+3=\dfrac{5}{4}$

よって，① は　　　$|\vec{p}|^2-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{p}+\dfrac{{}^{イ}7}{{}^{ウ}4}=0$

さらに，変形して　　$\left|\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|^2-\dfrac{|\vec{a}+\vec{b}|^2}{4}+\dfrac{7}{4}=0$　…… ②

ここで　　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4+2\cdot3+9=19$　…… ③

ゆえに，② から　　$\left|\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|^2-\dfrac{19}{4}+\dfrac{7}{4}=0$

よって　　$\left|\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|^2=3$

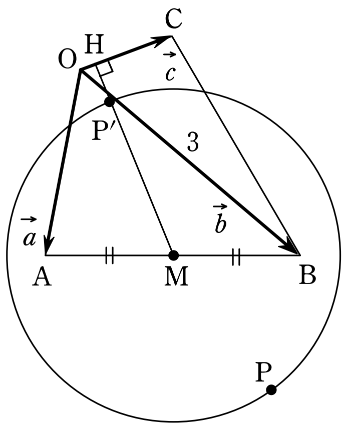
$\left|\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|>0$ であるから　　$\left|\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{{}^{エ}2}\right|=\sqrt{{}^{オ}3}$

したがって，点 M を $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ となるように定めると，点 P は，M を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円周上を動く。

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくと，$|\vec{c}|=1$，$\angle\mathrm{BOC}=60^\circ$ から

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos60^\circ=3\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos120^\circ=2\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$



$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{MH}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MH}}={}^{カ}0$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}})=0$$

すなわち　　$\vec{c}\cdot\left(t\vec{c}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)=0$

よって　　$t|\vec{c}|^2-\dfrac{1}{2}(\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c})=0$

ゆえに　　$t\cdot1^2-\dfrac{1}{2}\left(-1+\dfrac{3}{2}\right)=0$

これを解いて　　$t=\dfrac{{}^{キ}1}{{}^{ク}4}$

よって　　$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\dfrac{1}{4}|\vec{c}|=\dfrac{1}{4}$

また，③ から　　$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=\left|\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|=\dfrac{|\vec{a}+\vec{b}|}{2}=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$

直角三角形 OMH において，三平方の定理により

$$|\overrightarrow{\mathrm{MH}}|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{19}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{75}{16}}=\frac{{}^{ケ}5\sqrt{{}^{コ}3}}{{}^{サ}4}$$

M を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円と直線 MH の交点のうち，H に近い方を P′ とすると，
点 P と直線 OC の距離が最小になるのは，P が P′ と一致するときである。
よって，点 P と直線 OC の距離の最小値は

$$\mathrm{P'H}=\mathrm{MH}-\mathrm{MP'}=\frac{5\sqrt{3}}{4}-\sqrt{3}=\frac{\sqrt{{}^{\text{シ}}3}}{{}^{\text{ス}}4}$$

したがって，△OCP の面積の最小値は

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OC}\cdot\mathrm{P'H}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{{}^{\text{セ}}3}}{{}^{\text{ソ}}8}$$

別解　$|\overrightarrow{\mathrm{MH}}|$ の求め方

$\overrightarrow{\mathrm{MH}}=\dfrac{\vec{c}}{4}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=-\dfrac{2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}}{4}$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{MH}}|^2=\left|\frac{2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}}{4}\right|^2$$

$$=\frac{1}{16}(4|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+8\vec{a}\cdot\vec{b}-4\vec{b}\cdot\vec{c}-4\vec{a}\cdot\vec{c})$$

$$=\frac{1}{16}(16+36+1+24-6+4)=\frac{75}{16}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{MH}}|>0$ であるから　　$|\overrightarrow{\mathrm{MH}}|=\sqrt{\dfrac{75}{16}}=\dfrac{{}^{\text{ケ}}5\sqrt{{}^{\text{コ}}3}}{{}^{\text{サ}}4}$

3 解答　(ア)　2　　(イ)　2　　(ウ)　3　　(エ)　2　　(オ)　2　　(カキ)　-2　　(ク)　2

(ケコ)　-2　　(サ)　2　　(シ)　0　　(ス)　0　　$\dfrac{(\text{セ})}{(\text{ソ})}$　$\dfrac{1}{3}$　　$\dfrac{(\text{タ})}{(\text{チツ})}$　$\dfrac{1}{27}$

(テ)　3　　(ト)　0　　$\dfrac{(\text{ナ})}{(\text{ニ})}$　$\dfrac{4}{9}$　　(ヌ)　4　　(ネノ)　10

$g(x)=x^3$，$h(x)=x^2+px+q$ とする。

(1)　$g'(x)=3x^2$ であるから，点 $\mathrm{P}(a,\ a^3)$ における C の接線の方程式は

$$y-a^3=3a^2(x-a)$$

すなわち　　$y=3a^{{}^{\text{ア}}2}x-{}^{\text{イ}}2a^{{}^{\text{ウ}}3}$

D が点 P を通るから　　$a^3=a^2+pa+q$　……(＊)

また，D の P における接線と，C の P における接線が一致するから，

$h'(x)=2x+p$ より　　$2a+p=3a^2$

ゆえに　　$p=3a^{{}^{\text{エ}}2}-{}^{\text{オ}}2a$

これを (＊) に代入して　　$a^3=a^2+(3a^2-2a)\cdot a+q$

よって　　$q={}^{\text{カキ}}-2a^3+a^{{}^{\text{ク}}2}$

(2)　D が点 $\mathrm{Q}(0,\ b)$ を通るから

$$b=q={}^{\text{ケコ}}-2a^3+a^{{}^{\text{サ}}2}\quad\cdots\cdots②$$

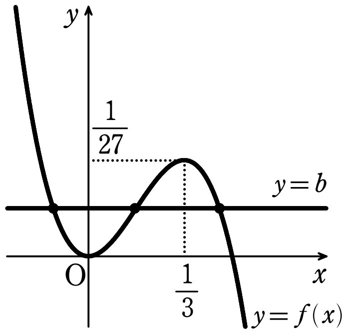
$f(x)=-2x^3+x^2$ について

$$f'(x)=-6x^2+2x=-2x(3x-1)$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=0,\ \dfrac{1}{3}$

$$f(0)=-2\cdot 0^3+0^2=0,$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{27}$$



x^3 の係数が負であるから，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。

したがって，関数 $f(x)$ は $x={}^{\text{シ}}0$ で極小値 ${}^{\text{ス}}0$ をとり，

$x=\dfrac{{}^{\text{セ}}1}{{}^{\text{ソ}}3}$ で極大値 $\dfrac{{}^{\text{タ}}1}{{}^{\text{チツ}}27}$ をとる。

② を満たす a の値の個数は，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=b$ の共有点の個数と一致する。

よって，図から，$0<b<\dfrac{1}{27}$ のとき，② を満たす a の値の個数は ${}^{\text{テ}}3$ である。

(3)　放物線 $y=x^2+(3a^2-2a)x-2a^3+a^2$ の頂点が x 軸上にあるための条件は，2 次方程式 $x^2+(3a^2-2a)x-2a^3+a^2=0$ …… ③ が重解をもつことである。

すなわち，③ の判別式が 0 になるときである。

よって　　$(3a^2-2a)^2-4\cdot(-2a^3+a^2)=0$

すなわち　　$a^3(9a-4)=0$　　　　ゆえに　　$a={}^{\text{ト}}0,\ \dfrac{{}^{\text{ナ}}4}{{}^{\text{ニ}}9}$

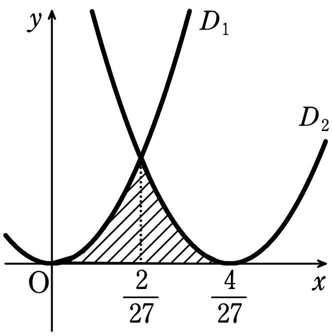
D の頂点が x 軸上にあるとき，その方程式は $y=\left(x+\dfrac{3a^2-2a}{2}\right)^2$ となる。

$a=0$ のとき　　$\dfrac{3a^2-2a}{2}=0$

よって，D_1 の方程式は　　$y=x^2$

$a=\dfrac{4}{9}$ のとき　　$\dfrac{3a^2-2a}{2}=\dfrac{1}{2}\left\{3\cdot\left(\dfrac{4}{9}\right)^2-2\cdot\left(\dfrac{4}{9}\right)\right\}=-\dfrac{4}{27}$

よって，D_2 の方程式は　　$y=\left(x-\dfrac{4}{27}\right)^2$



ゆえに，D_1，D_2 と x 軸で囲まれた図形は，右の図の斜線部分である。

この図形は直線 $x=\dfrac{2}{27}$ に関して対称である。

よって，求める図形の面積は

$$2\int_0^{\frac{2}{27}} x^2dx=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{2}{27}}=\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{27}\right)^3$$

$$=\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3^3}\right)^3=\frac{2^{{}^{\text{ヌ}}4}}{3^{{}^{\text{ネノ}}10}}$$

4 解答　(ア)　2　(イ)　5　(ウ)　3　(エ)　0　(オ)　1　(カキ)　-7

$$
\begin{array}{r}
x+m+2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\
x^2-2x-1\,\big)\,\overline{x^3+mx^2 \qquad\qquad +nx+2m+n+1} \\
x^3-2x^2 \qquad\qquad\quad -x \qquad\qquad\qquad \\
\hline
(m+2)x^2 \quad +(n+1)x+2m+n+1 \\
(m+2)x^2-2(m+2)x \;\; -m \qquad -2 \\
\hline
(2m+n+5)x+3m+n+3
\end{array}
$$

この計算から　　$Q=x+(m+{}^{ア}2)$

$R=(2m+n+{}^{イ}5)x+(3m+n+{}^{ウ}3)$

$x=1+\sqrt{2}$ のとき　$x-1=\sqrt{2}$

両辺を 2 乗して　　$(x-1)^2=2$　　　よって　　$x^2-2x-1=0$

ゆえに，B の値は　　${}^{エ}0$

$A=BQ+R$ で，$x=1+\sqrt{2}$ のとき $B=0$，$A=-1$ であるから

$$-1=0\cdot\{(1+\sqrt{2})+(m+2)\}+(2m+n+5)(1+\sqrt{2})+(3m+n+3)$$

整理すると　　$(5m+2n+9)+(2m+n+5)\sqrt{2}=0$

m，n はともに有理数であるから，$5m+2n+9$，$2m+n+5$ も有理数。

よって　　　$5m+2n+9=0$，$2m+n+5=0$

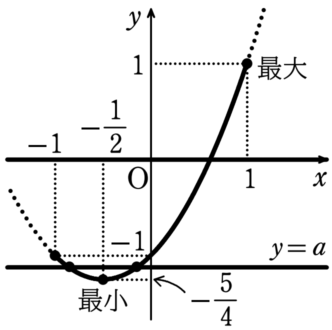
これを解くと　　$m={}^{オ}1$，$n={}^{カキ}-7$

5 解答　(ア)　1　$\dfrac{(イウ)}{(エ)}$　$\dfrac{-5}{4}$　(オ)　2　$\dfrac{(カキ)}{(ク)}$　$\dfrac{-5}{4}$　(ケコ)　-1

$\cos\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ から　　$-1\leqq t\leqq 1$

$$f(\theta)=t^2+t-1=t^2+t+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-1$$

$$=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$$



右のグラフより，$f(\theta)$ は

$t=1$ のとき最大値 ${}^{ア}1$

$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{{}^{イウ}-5}{{}^{エ}4}$　をとる。

ここで，$\cos\theta=\alpha$ を満たす θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ の個数を考える。

$-1<\alpha<1$ のとき　θ は 2 個

$\alpha=\pm1$ のとき　　θ は 1 個　　存在する。

$a=0$ のとき，グラフより，$f(\theta)=0$ の解 t は，$-1<t<1$ の範囲に 1 つ存在する。

したがって，解 θ は　${}^{オ}2$ 個

また，方程式が 4 つの解をもつのは，$y=t^2+t-1$ のグラフと直線 $y=a$ が $-1<t<1$ の範囲で異なる 2 つの共有点をもつときである。

したがって，グラフより　　$\dfrac{{}^{カキ}-5}{{}^{ク}4}<a<{}^{ケコ}-1$

6 解答　(1)　15　　(2)　816　　(3)　2047

(1)　m 個の ○ を 1 列に並べて，○ と ○ の間の $(m-1)$ か所から $(n-1)$ 個を選んで仕切り | を入れ，左から順に仕切りで区切られた ○ の数をそれぞれ，自然数の列の数とすると，自然数の列が 1 つ決まる。

逆に，この ○ と | の列から自然数の列がすべて得られる。

例えば，7 個の ○ の間に，右の図のように 2 つの仕切り | を入れたとき，自然数の列は 1，4，2 となる。

○ | ○　○　○　○ | ○　○

よって　　$f(7,\ 3)={}_{7-1}C_{3-1}={}_{6}C_{2}=15$

(2)　(1) と同様に考えて　　$f(19,\ 4)={}_{19-1}C_{4-1}={}_{18}C_{3}=816$

(3)　(1) と同様に考えて　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{11} f(12,\ k)=\sum_{k=1}^{11} {}_{11}C_{k-1}={}_{11}C_{0}+{}_{11}C_{1}+\cdots\cdots+{}_{11}C_{10}$

ここで，二項定理により　　$(1+x)^{11}={}_{11}C_{0}+{}_{11}C_{1}x+\cdots\cdots+{}_{11}C_{10}x^{10}+{}_{11}C_{11}x^{11}$

この等式で，$x=1$ とおくと　　$(1+1)^{11}={}_{11}C_{0}+{}_{11}C_{1}+\cdots\cdots+{}_{11}C_{10}+{}_{11}C_{11}$

よって　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{11} f(12,\ k)=2^{11}-{}_{11}C_{11}=2048-1=2047$