大阪医科薬科大学対策問題2023ver2

1 解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$n=5k$ (k は自然数) のとき　　$6n^2+5=6\cdot(5k)^2+5=5(30k^2+1)$

$30k^2+1$ は 1 より大きい整数であるから，$5(30k^2+1)$ は素数ではない。

よって，$n=5k$ (k は自然数) のとき，n は条件 (*) を満たさない。

(2)　$n=1$ のとき　　$n^2+1=2$，$2n^2+3=5$，$6n^2+5=11$

2，3，11 はすべて素数であるから，$n=1$ は条件 (*) を満たす。

$n=2$ のとき　　$n^2+1=5$，$2n^2+3=11$，$6n^2+5=29$

5，11，29 はすべて素数であるから，$n=2$ は条件 (*) を満たす。

$n \geqq 3$ のとき，n は自然数 k を用いて，$5k-2$，$5k-1$，$5k$，$5k+1$，$5k+2$ のいずれかの形で表される。

[1]　$n=5k\pm 2$ のとき

$$n^2+1=(5k\pm 2)^2+1=25k^2\pm 20k+5=5(5k^2\pm 4k+1)\quad(\text{複号同順})$$

$5k^2\pm 4k+1=k(5k\pm 4)+1$ は 1 より大きい整数であるから，$5(5k^2\pm 4k+1)$ は素数ではない。

[2]　$n=5k\pm 1$ のとき

$$2n^2+3=2(5k\pm 1)^2+3=50k^2\pm 20k+5=5(10k^2\pm 4k+1)\quad(\text{複号同順})$$

$10k^2\pm 4k+1=k(10k\pm 4)+1$ は 1 より大きい整数であるから，$5(10k^2\pm 4k+1)$ は素数ではない。

[1]，[2] と (1) から，$n \geqq 3$ のとき，n は条件 (*) を満たさない。

ゆえに，条件 (*) を満たす n は $n=1$，2 のみである。

$\boxed{2}$ 解答 (1) $\dfrac{(k+1)^3}{n^3}$ (2) $\dfrac{6k}{n^3}$ (3) $\dfrac{6s(n-s)}{n^3}$ (4) $s=\dfrac{n}{2}$

解説

(1) $X \geqq j$ かつ $Y \leqq j+k$ となるのは，3 回とも j 以上 $j+k$ 以下のカードを引く場合である。

j 以上 $j+k$ 以下のカードの枚数は $(j+k)-j+1=k+1$ (枚)

よって，求める確率は $\dfrac{(k+1)^3}{n^3}$

(2) $X=j$ かつ $Y=j+k$ となるのは，取り出したカードに書かれた 3 つの整数が j，$j+a$，$j+k$ ($a=0$，1，2，……，k) のときで，次の 3 つの場合に分けられる。

[1] 3 つの整数が j，j，$j+k$ のとき

このようになる取り出し方は 3 通り

[2] 3 つの整数が j，$j+k$，$j+k$ のとき

このようになる取り出し方も 3 通り

[3] 3 つの整数が j，$j+a$，$j+k$ ($a=1$，2，……，$k-1$) のとき

a がとりうる整数は $k-1$ 通りあり，j，$j+a$，$j+k$ を取り出す順序が $3!=6$ 通りあるから，このようになる取り出し方は $6(k-1)$ 通り

以上から，$X=j$ かつ $Y=j+k$ となる場合の数は

$$3+3+6(k-1)=6k \text{ (通り)}$$

よって，求める確率は $\dfrac{6k}{n^3}$

(3) $Y-X=s$ となるのは，$X=j$，$Y=j+s$ ($j=1$，2，……，$n-s$) の場合である。

よって，(2) から $P(s)=\dfrac{6s}{n^3}\times(n-s)=\dfrac{6s(n-s)}{n^3}$

(4) $P(s)$ は s についての 2 次関数で，平方完成すると

$$P(s)=-\frac{6}{n^3}(s^2-ns)=-\frac{6}{n^3}\left(s-\frac{n}{2}\right)^2+\frac{3}{2n}$$

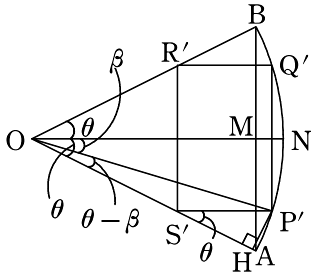
n は偶数であるから，$\dfrac{n}{2}$ は整数である。また，$n \geqq 2$ であるから $1 \leqq \dfrac{n}{2} \leqq n-1$

よって，$P(s)$ を最大にする s は $s=\dfrac{n}{2}$

$\boxed{3}$ 解答　(1)　$\alpha=\dfrac{\theta}{2}$　　(2)　$\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$　　(3)　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$

解説

(1)　右の図のように，扇形 OAB に内接する長方形を P′Q′R′S′ とし，弦 AB の中点を M，直線 OM と弧 AB の交点を N とする。



このとき，$\angle \mathrm{AON}=\theta$ であり，$\angle \mathrm{P'OQ'}=2\beta$ とすると，$\angle \mathrm{P'ON}=\beta$ である。

よって　　$\mathrm{P'Q'}=2\sin\beta$

また，P′ から線分 OA に下ろした垂線を P′H とすると $\angle \mathrm{P'OH}=\theta-\beta$ であるから　　$\mathrm{P'H}=\sin(\theta-\beta)$

$\angle \mathrm{P'S'H}=\theta$ であるから　　$\mathrm{P'S'}=\dfrac{\mathrm{P'H}}{\sin\theta}=\dfrac{\sin(\theta-\beta)}{\sin\theta}$

したがって，長方形 P′Q′R′S′ の面積 T は

$$T=\mathrm{P'Q'}\cdot\mathrm{P'S'}=\frac{2\sin\beta\sin(\theta-\beta)}{\sin\theta}=\frac{\cos(\theta-2\beta)-\cos\theta}{\sin\theta}$$

$0<\beta<\theta$ より，$-\theta<\theta-2\beta<\theta$ であるから，T が最大となるのは，$\theta-2\beta=0$ すなわち $\beta=\dfrac{\theta}{2}$ のときである。

したがって　　$\alpha=\dfrac{\theta}{2}$

(2)　(1) より　　$T=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

(3)　(1) より　　$\mathrm{PQ}=2\sin\dfrac{\theta}{2}$，$\mathrm{PS}=\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}$

四角形 PQRS が正方形のとき，PQ＝PS から

$$2\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}\qquad したがって\qquad \sin\theta=\frac{1}{2}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より　　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$

$\boxed{4}$ 解答　(1)　± 1，$\pm i$　　(2)　$\pm\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$，$\pm\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$，$\pm\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$，$\pm\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$

(3)　1

解説

$|z|=1$ であるから，$z=\cos\theta+i\sin\theta$ $(0^\circ \leqq \theta < 360^\circ)$ とおける．

(1)　$z^3-z=(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)-(\cos\theta+i\sin\theta)=(\cos 3\theta-\cos\theta)+i(\sin 3\theta-\sin\theta)$

z^3-z の実部が 0 のとき　$\cos 3\theta-\cos\theta=0$

よって　$-2\sin 2\theta\sin\theta=0$

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ であるから　$4\sin^2\theta\cos\theta=0$

$\sin\theta=0$ のとき　$\theta=0^\circ$，180°

$\cos\theta=0$ のとき　$\theta=90^\circ$，270°

したがって　$z=\pm 1$，$\pm i$

(2)　$|z^5+z|=|z(z^4+1)|=|z||z^4+1|$

$|z^5+z|=1$，$|z|=1$ であるから　$|z^4+1|=1$　…… ①

$z^4+1=\cos 4\theta+1+i\sin 4\theta$ であるから，① より　$(\cos 4\theta+1)^2+\sin^2 4\theta=1$

ゆえに　$2+2\cos 4\theta=1$　　よって　$\cos 4\theta=-\dfrac{1}{2}$

$0^\circ \leqq 4\theta < 1440^\circ$ であるから　$4\theta=120^\circ$，240°，480°，600°，840°，960°，1200°，1320°

ゆえに　$\theta=30^\circ$，60°，120°，150°，210°，240°，300°，330°

よって　$z=\pm\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$，$\pm\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$，$\pm\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$，$\pm\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$

(3)　$z^n+1=(\cos n\theta+1)+i\sin n\theta$

$|z^n+1|=1$ のとき　$(\cos n\theta+1)^2+\sin^2 n\theta=1$

ゆえに　$2+2\cos n\theta=1$　　よって　$\cos n\theta=-\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$n\theta=120^\circ+360^\circ\times k$，$240^\circ+360^\circ\times k$ $(k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n-1)$

よって　$\theta=\dfrac{120^\circ}{n}+\dfrac{360^\circ}{n}k$，$\dfrac{240^\circ}{n}+\dfrac{360^\circ}{n}k$

ここで　
$$\left\{\cos\left(\frac{120^\circ}{n}+\frac{360^\circ}{n}k\right)+i\sin\left(\frac{120^\circ}{n}+\frac{360^\circ}{n}k\right)\right\}$$
$$\times\left\{\cos\left(\frac{240^\circ}{n}+\frac{360^\circ}{n}k\right)+i\sin\left(\frac{240^\circ}{n}+\frac{360^\circ}{n}k\right)\right\}$$
$$=\cos\left(\frac{360^\circ}{n}+\frac{720^\circ}{n}k\right)+i\sin\left(\frac{360^\circ}{n}+\frac{720^\circ}{n}k\right)$$

したがって，求める複素数を w とすると

$$w=\cos\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{360^\circ}{n}+\frac{720^\circ}{n}k\right)\right\}+i\sin\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{360^\circ}{n}+\frac{720^\circ}{n}k\right)\right\}$$

ここで　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{360^\circ}{n}+\frac{720^\circ}{n}k\right)=\frac{360^\circ}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(1+2k)=\frac{360^\circ}{n}\cdot\left\{n+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}\right\}=360^\circ\times n$

よって　$w=\cos(360^\circ\times n)+i\sin(360^\circ\times n)=1$

5 解答　(1)　$a_0=e$　　(2)　$n+1$　　(3)　(i)　0　　(ii)　1

解説

(1)　$y=\log x$ から　　$y'=\dfrac{1}{x}$

点 $(t,\ \log t)$ における C の接線の方程式は　　$y-\log t=\dfrac{1}{t}(x-t)$

すなわち　　$y=\dfrac{1}{t}(x-t)+\log t$　……①

$n=0$ のとき，接線は原点を通るから，① で $x=0$，$y=0$ とすると

$0=-1+\log t$

よって，$t=e$ であるから　　$a_0=e$

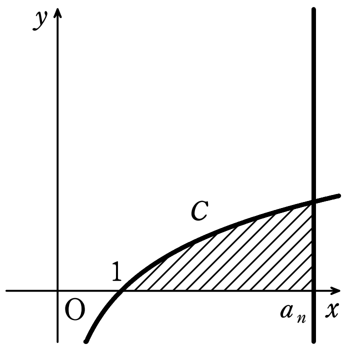
(2)　① で $x=-n$，$y=0$ とすると

$\dfrac{1}{t}(-n-t)+\log t=0$

整理すると　　$t\log t-t=n$

$t=a_n$ とすると　　$a_n\log a_n-a_n=n$　……②

求める面積は，右の図の斜線部分の面積であるから



$$\int_1^{a_n}\log x\,dx=\Big[x\log x-x\Big]_1^{a_n}$$
$$=a_n\log a_n-a_n+1=n+1$$

(3)　(i)　$\displaystyle\int_{a_n}^{a_{n+1}}\log x\,dx=\int_1^{a_{n+1}}\log x\,dx-\int_1^{a_n}\log x\,dx=1$

$y=\log x$ は $x>0$ において，単調に増加する関数であるから，十分大きい x の値に

対して　　$\displaystyle\int_{a_n}^{a_{n+1}}\log a_n\,dx<\int_{a_n}^{a_{n+1}}\log x\,dx<\int_{a_n}^{a_{n+1}}\log a_{n+1}\,dx$

$$(a_{n+1}-a_n)\log a_n<1<(a_{n+1}-a_n)\log a_{n+1}$$

十分大きい n の値に対して，$a_{n+1}-a_n>0$，$\log a_n>0$ であるから

$$\frac{1}{\log a_{n+1}}<a_{n+1}-a_n<\frac{1}{\log a_n}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log a_n}=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log a_{n+1}}=0$

よって，はさみうちの原理により　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$

(ii)　② から　　$\dfrac{a_n\log a_n-a_n}{n}=1$

$$\frac{a_n\log a_n}{n}\cdot\left(1-\frac{1}{\log a_n}\right)=1$$

$$\frac{a_n\log a_n}{n}=\left(1-\frac{1}{\log a_n}\right)^{-1}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\log a_n}\right)=1$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n\log a_n}{n}=1$