大阪医科薬科大学対策問題2023ver2

$\boxed{1}$ 自然数 n について，次のような命題を考える。

(*)　n^2+1，$2n^2+3$，$6n^2+5$ がすべて素数である

(1)　$n=5k$ (k は自然数) のとき，n は (*) を満たさないことを示せ。

(2)　(*) を満たすような n は $n=1$，2 のみであることを示せ。

$\boxed{2}$ n を 2 以上の整数とする。1 から n までの整数が 1 つずつ書かれている n 枚のカードがある。ただし，異なるカードには異なる整数が書かれているものとする。この n 枚のカードから，1 枚のカードを無作為に取り出して，書かれた整数を調べてからもとに戻す。この試行を 3 回繰り返し，取り出したカードに書かれた整数の最小値を X，最大値を Y とする。ただし，j と k は正の整数で，$j+k \leqq n$ を満たすとする。また，s は $n-1$ 以下の正の整数とする。

(1)　$X \geqq j$ かつ $Y \leqq j+k$ となる確率を求めよ。

(2)　$X=j$ かつ $Y=j+k$ となる確率を求めよ。

(3)　$Y-X=s$ となる確率を $P(s)$ とする。$P(s)$ を求めよ。

(4)　n が偶数のとき，$P(s)$ を最大にする s を求めよ。

$\boxed{3}$ 半径 $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=1$，中心角 $\angle\mathrm{AOB}=2\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の扇形 OAB がある。長方形 PQRS は，扇形 OAB に内接し，その 2 辺が弦 AB と平行であるような長方形の中で面積が最大のものである。

(1)　頂点 P と Q が弧 AB 上にあるとして，$\angle\mathrm{POQ}=2\alpha$ とするとき，α を θ で表せ。

(2)　長方形 PQRS の面積を θ の三角比を用いて表せ。

(3)　長方形 PQRS が正方形であるときの θ の値を求めよ。

$\boxed{4}$ z を絶対値が 1 の複素数とする.

(1)　z^3-z の実部が 0 となるような z をすべて求めよ.

(2)　z^5+z の絶対値が 1 となるような z をすべて求めよ.

(3)　n を自然数とする．z^n+1 の絶対値が 1 となるような z をすべてかけ合わせて得られる複素数を求めよ.

$\boxed{5}$ n を 0 以上の整数とする。点 $(-n,\ 0)$ から曲線 C : $y=\log x$ に引いた接線の接点の x 座標を a_n とおく。

(1) a_0 の値を求めよ。

(2) 直線 $x=a_n$，曲線 C および x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

(3) 次の極限を求めよ。ただし，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ であることは用いてよい。

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$　　(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n\log a_n}{n}$