大阪医科薬科大対策　2023ver1　※6は補充

1

解答　(1)　$a=4$，$b=2$，$c=0$，$d=2$　　(2)　23 個　　(3)　(84，84)

解説

(1)　$7056=2^4\cdot 3^2\cdot 7^2$

よって　$a=4$，$b=2$，$c=0$，$d=2$

(2)　7056 の正の約数の個数は　$(4+1)(2+1)(2+1)=45$ (個)

よって，大小関係を無視した $(x,\ y)$ の組み合わせの個数も 45 個である．

このうち，$x=y$ となるのは $(x,\ y)=(2^2\cdot 3\cdot 7,\ 2^2\cdot 3\cdot 7)$ の 1 個であり，x と y の対称性から，求める個数は

$$\frac{45-1}{2}+1=23\text{ (個)}$$

(3)　相加平均と相乗平均の大小関係により

$x+y\geqq 2\sqrt{xy}=2\sqrt{2^4\cdot 3^2\cdot 7^2}=2\cdot 2^2\cdot 3\cdot 7=168$

等号が成り立つのは $x=y=2^2\cdot 3\cdot 7=84$ のときである．

したがって　$(x,\ y)=(84,\ 84)$

2

解答　(1)　$P(A)=\dfrac{13}{18}$，$P(B)=\dfrac{5}{9}$，$P(C)=\dfrac{5}{54}$　　(2)　$\dfrac{35}{39}$

(3)　$P(X_{(1)}=4)=\dfrac{65}{1296}$，$P(X_{(1)}=X_{(2)}=4)=\dfrac{11}{432}$

解説

起こりうるすべての場合の数は　　6^4 通り

(1)　事象 A は，4 回とも違う目が出るという事象の余事象である。

4 回とも違う目が出る場合の数は ${}_6\mathrm{P}_4$ 通りである。

したがって　　$P(A)=1-\dfrac{{}_6\mathrm{P}_4}{6^4}=1-\dfrac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{6^4}=1-\dfrac{5}{18}=\dfrac{13}{18}$

事象 B について，組 $\{j,\ k\}$ の選び方は ${}_4\mathrm{C}_2$ 通り，$X_j\ (=X_k)$ の選び方は 6 通り，

X_j，X_k 以外の数字の並べ方は ${}_5\mathrm{P}_2$ 通りある。

よって　　$P(B)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2\times 6\times {}_5\mathrm{P}_2}{6^4}=\dfrac{6\times 6\times 5\cdot 4}{6^4}=\dfrac{5\cdot 4}{6^2}=\dfrac{5}{9}$

事象 C について，X_1，X_2，X_3，X_4 のうち，どの 3 つが等しくなるかで ${}_4\mathrm{C}_3$ 通り，

ちょうど 3 つ出る目の選び方は 6 通り，残りの目の選び方は 5 通りある。

よって　　$P(C)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3\times 6\times 5}{6^4}=\dfrac{4\times 5}{6^3}=\dfrac{5}{54}$

(2)　$P_A(B\cup C)=\dfrac{P(A\cap(B\cup C))}{P(A)}$

$A \supset B$，$A \supset C$ であるから　　$A \supset (B \cup C)$　　　　よって　　$A \cap (B \cup C) = B \cup C$

ゆえに　　$P(A \cap (B \cup C)) = P(B \cup C)$

また，$B \cap C = \varnothing$ であるから　　$P(B \cup C) = P(B) + P(C)$

したがって　　$P_A(B \cup C) = \dfrac{P(B \cup C)}{P(A)} = \dfrac{P(B) + P(C)}{P(A)} = \left(\dfrac{5}{9} + \dfrac{5}{54}\right) \times \dfrac{18}{13} = \dfrac{35}{39}$

(3)　$P(X_{(1)} = 4) = P(X_{(1)} \geqq 4) - P(X_{(1)} \geqq 5)$

$X_{(1)} \geqq 4$ となるのは，X_1，X_2，X_3，X_4 の値がいずれも 4 以上のときであるから

$$P(X_{(1)} \geqq 4) = \left(\frac{3}{6}\right)^4 = \frac{81}{6^4}$$

$X_{(1)} \geqq 5$ となるのは，X_1，X_2，X_3，X_4 の値がいずれも 5 以上のときであるから

$$P(X_{(1)} \geqq 5) = \left(\frac{2}{6}\right)^4 = \frac{16}{6^4}$$

よって　　$P(X_{(1)} = 4) = \dfrac{81}{6^4} - \dfrac{16}{6^4} = \dfrac{65}{6^4} = \dfrac{65}{1296}$

また，$X_{(1)} = X_{(2)} = 4$ となるのは，次の [1] ～ [3] のいずれかの場合である。

[1]　$X_{(1)} = X_{(2)} = 4$，$X_{(3)} \geqq 5$，$X_{(4)} \geqq 5$ の場合

X_1，X_2，X_3，X_4 のうち，どの 2 つが 4 になるかで ${}_4\mathrm{C}_2$ 通り，$X_{(3)}$ の値の選び方は 2 通り，$X_{(4)}$ の値の選び方は 2 通りであるから，この場合の確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2 \times 2 \times 2}{6^4} = \frac{24}{6^4}$$

[2]　$X_{(1)} = X_{(2)} = X_{(3)} = 4$，$X_{(4)} \geqq 5$ の場合

X_1，X_2，X_3，X_4 のうち，どの 3 つが 4 になるかで ${}_4\mathrm{C}_3$ 通り，$X_{(4)}$ の値の選び方は 2 通りであるから，この場合の確率は　　$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3 \times 2}{6^4} = \dfrac{8}{6^4}$

[3]　$X_{(1)} = X_{(2)} = X_{(3)} = X_{(4)} = 4$ の場合

この場合の確率は　　$\dfrac{1}{6^4}$

[1] ～ [3] から　　$P(X_{(1)} = X_{(2)} = 4) = \dfrac{24}{6^4} + \dfrac{8}{6^4} + \dfrac{1}{6^4} = \dfrac{33}{6^4} = \dfrac{11}{432}$

$\boxed{3}$

解答 (1) $\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ 2\right)$, $\dfrac{\sqrt{35}}{2}$ (2) $X=-\dfrac{5}{2(t-5)}$, $Y=-\dfrac{5s}{t-5}$

(3) $10\sqrt{35}\,\pi$

解説

(1) $x^2+y^2+(z-2)^2=9$ に $x=\dfrac{1}{2}$ を代入すると

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2+(z-2)^2=9$ すなわち $y^2+(z-2)^2=\dfrac{35}{4}$

よって，円 C の中心の座標は $\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ 2\right)$，半径は $\dfrac{\sqrt{35}}{2}$ である。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\left(\dfrac{1}{2},\ s,\ t\right)-(0,\ 0,\ 5)=\left(\dfrac{1}{2},\ s,\ t-5\right)$

R は直線 PQ 上の点であるから，実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{PR}}=k\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と表される。

すなわち $(X,\ Y,\ 0)-(0,\ 0,\ 5)=k\left(\dfrac{1}{2},\ s,\ t-5\right)$

よって $(X,\ Y,\ -5)=\left(\dfrac{1}{2}k,\ ks,\ k(t-5)\right)$

ゆえに $X=\dfrac{1}{2}k$ ……①，$Y=ks$ ……②，$-5=k(t-5)$ ……③

$t=5$ とすると ③ は成り立たないから $t\neq 5$

よって $k=-\dfrac{5}{t-5}$

これを ①，② に代入して $X=-\dfrac{5}{2(t-5)}$ ……④，$Y=-\dfrac{5s}{t-5}$ ……⑤

(3) ④ から $X\neq 0$ で $2(t-5)X=-5$ ゆえに $t-5=-\dfrac{5}{2X}$

よって $t=\dfrac{5(2X-1)}{2X}$ ……⑥

⑤ から $(t-5)Y=-5s$

よって $s=-\dfrac{(t-5)Y}{5}=-\left(-\dfrac{5}{2X}\right)\dfrac{Y}{5}=\dfrac{Y}{2X}$ ……⑦

Q $\left(\dfrac{1}{2},\ s,\ t\right)$ は円 C 上の点であるから $s^2+(t-2)^2=\dfrac{35}{4}$

この等式に ⑥，⑦ を代入すると $\left(\dfrac{Y}{2X}\right)^2+\left\{\dfrac{5(2X-1)}{2X}-2\right\}^2=\dfrac{35}{4}$

よって $Y^2+(6X-5)^2=35X^2$ ゆえに $X^2-60X+Y^2=-25$

すなわち $(X-30)^2+Y^2=875$

よって，点 R は xy 平面上の円 $(x-30)^2+y^2=875$ 上にある。

逆に，この円上の任意の点は，条件を満たす。

ゆえに，R が描く曲線 C' は，中心 $(30,\ 0,\ 0)$，半径 $\sqrt{875}=5\sqrt{35}$ の円である。

したがって，C' の長さ L は $L=2\pi\times 5\sqrt{35}=10\sqrt{35}\,\pi$

$\boxed{4}$

解答 (1) 略　(2) $\beta+\overline{\beta}=-1$，$\beta\overline{\beta}=2$　(3) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

解説

(1) $\overline{\alpha}=\cos\theta-i\sin\theta=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)=\cos(2\pi-\theta)+i\sin(2\pi-\theta)$

$=\cos(7\theta-\theta)+i\sin(7\theta-\theta)=\cos6\theta+i\sin6\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^6=\alpha^6$

(2) $\left(\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}\right)^7=\cos2\pi+i\sin2\pi=1$

よって　$\alpha^7=1$　……①

ゆえに　$(\alpha-1)(\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0$

$\alpha\neq1$ であるから　$\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$

また，(1) と同様に考えると，$\overline{\alpha^2}=\alpha^5$，$\overline{\alpha^4}=\alpha^3$ が導かれる。

ゆえに　$\overline{\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\alpha^2}+\overline{\alpha^4}=\alpha^6+\alpha^5+\alpha^3$

よって　$\beta+\overline{\beta}=\alpha+\alpha^2+\alpha^4+\alpha^6+\alpha^5+\alpha^3=-1$

次に，① に注意すると

$\beta\overline{\beta}=(\alpha+\alpha^2+\alpha^4)(\alpha^6+\alpha^5+\alpha^3)=\alpha^7+\alpha^6+\alpha^4+\alpha^8+\alpha^7+\alpha^5+\alpha^{10}+\alpha^9+\alpha^7$

$=1+\alpha^6+\alpha^4+\alpha+1+\alpha^5+\alpha^3+\alpha^2+1=3+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6$

$=3-1=2$

(3) $\sin\theta+\sin2\theta+\sin4\theta$ は，β の虚部を表す。

また，(2) から，β は

$x^2-(\beta+\overline{\beta})x+\beta\overline{\beta}=0$　すなわち　$x^2+x+2=0$

の解である。

これを解いて　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

$\sin4\theta+\sin\theta=2\sin\dfrac{5}{2}\theta\cos\dfrac{3}{2}\theta>0$，

$\left(0<\dfrac{5}{2}\theta<\pi,\ 0<\dfrac{3}{2}\theta<\dfrac{\pi}{2}\text{ より}\right)$

$\sin2\theta>0$ であるから　$\sin\theta+\sin2\theta+\sin4\theta>0$

したがって　$\sin\theta+\sin2\theta+\sin4\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

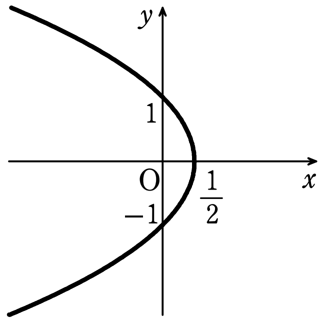
$\boxed{5}$

解答　(1)　〔図〕

(2)　略

(3)　略

(1)



解説

(1)　曲線 C 上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$，直交座標を $(x,\ y)$ とする。

極方程式 $r=\dfrac{1}{1+\cos\theta}$ を変形すると　　$r+r\cos\theta=1$

$r\cos\theta=x$ を代入すると　$r+x=1$　すなわち　$r=1-x$

両辺を 2 乗して　　$r^2=(1-x)^2$

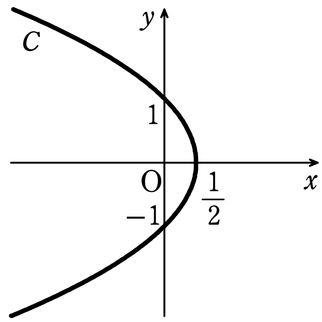
$r^2=x^2+y^2$ より　　$x^2+y^2=(1-x)^2$

整理すると　$y^2=-2x+1$

すなわち　　$y^2=-2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$

また，$r>0$ より　　$1-x>0$　　すなわち　　$x<1$

よって，曲線 C の概形は右の図のようになる。



(2)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\cos\theta>0$，$\sin\theta>0$ であるから　　$x>0$，$y>0$

$y^2=-2x+1$ の両辺を x について微分すると　　$2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=-2$

$y>0$ であるから　　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{y}$

よって，点 P における C の接線の傾きは　　$-\dfrac{1}{y}=-\dfrac{1}{r\sin\theta}=-\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

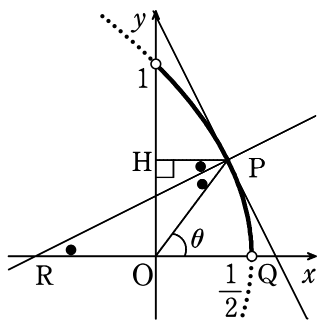
(3)　(2) より，点 P における C の接線の傾きは $-\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$ であるから，∠OPH の二等分線の傾きが $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ であることを示せばよい。

Q$\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ とし，∠OPH の二等分線と x 軸との交点を R とする。

P の極座標は $(r,\ \theta)$ であるから　　∠POQ$=\theta$

∠HPR＝∠ORP，∠OPR＋∠ORP$=\theta$ より

$$\angle\mathrm{ORP}=\frac{\theta}{2}$$



よって，∠OPH の二等分線の傾きは　　$\tan\dfrac{\theta}{2}$

ここで　　$\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)^2}$

$$=\frac{1-\cos^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}=\frac{\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\sin\theta>0$，$\tan\dfrac{\theta}{2}>0$ であるから　　$\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

よって，∠OPH の二等分線と点 P における C の接線は直交する。

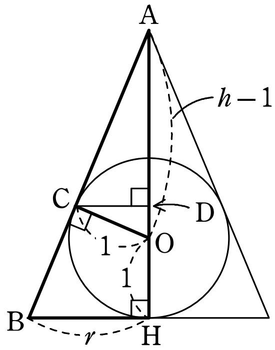
6

解答　(1)　$h=\dfrac{2r^2}{r^2-1}$　(2)　$r=\sqrt{2}$ のとき最小値 $\dfrac{8}{3}\pi$　(3)　$\dfrac{8}{3}$　(4)　$\dfrac{28}{81}\pi$

解説

(1)　球の中心を O とする。

直円錐の頂点を通り，底面に垂直な平面で直円錐を切断し，右の図のように点 A，B，C，D，H をとる。



OC＝1，OA＝$h-1$ であるから

$$AC=\sqrt{(h-1)^2-1}=\sqrt{h^2-2h}$$

△OAC∽△BAH であるから

$$OC:BH=AC:AH$$

よって，$1:r=\sqrt{h^2-2h}:h$ から　$r^2(h^2-2h)=h^2$

ゆえに　$h\{(r^2-1)h-2r^2\}=0$

$h\fallingdotseq 0$，$r\fallingdotseq 1$ であるから　$h=\dfrac{2r^2}{r^2-1}$

(2)　直円錐の体積を $V(r)$ とおくと

$$V(r)=\frac{1}{3}\cdot\pi BH^2\cdot AH=\frac{\pi}{3}r^2h=\frac{2\pi r^4}{3(r^2-1)}\quad(r>1)$$

よって　$V'(r)=\dfrac{2\pi}{3}\cdot\dfrac{4r^3(r^2-1)-r^4\cdot 2r}{(r^2-1)^2}=\dfrac{4\pi}{3}\cdot\dfrac{r^3(r^2-2)}{(r^2-1)^2}$

$V'(r)=0$ とすると，$r>1$ から　$r=\sqrt{2}$

$V(r)$ の増減表は右のようになる。

r	1	…	$\sqrt{2}$	…
$V'(r)$		$-$	0	$+$
$V(r)$		↘	$\dfrac{8}{3}\pi$	↗

ゆえに，$V(r)$ は $r=\sqrt{2}$ のとき最小値 $\dfrac{8}{3}\pi$ をとる。

(3)　(1)，(2) から，$V(r)$ が最小となるとき

$$h=4,\ AC=2\sqrt{2},\ AB=\sqrt{(\sqrt{2})^2+4^2}=3\sqrt{2}$$

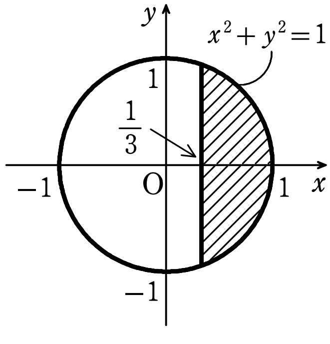
求める高さは (1) の図における線分 AD の長さである。

CD∥BH であるから　AD：AH＝AC：AB

よって，AD：$4=2\sqrt{2}:3\sqrt{2}$ から　$AD=\dfrac{8}{3}$

(4)　(3) から，(1) の図において　$OD=\dfrac{1}{3}$

よって，求める体積は，右図の斜線部分を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積である。



ゆえに　$\pi\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{1}y^2dx=\pi\int_{\frac{1}{3}}^{1}(1-x^2)dx$

$$=\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{3}}^{1}=\frac{28}{81}\pi$$