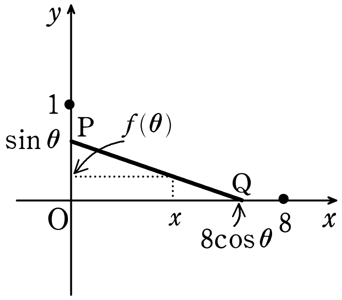
第4回　大阪医科大演習

$\boxed{1}$

解答　$\dfrac{128}{105}\pi$



線分 PQ の方程式は

$\theta=0$ のとき　　$y=0\ (0\leqq x\leqq 8)$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき　　$\dfrac{x}{8\cos\theta}+\dfrac{y}{\sin\theta}=1$

$(0\leqq x\leqq 8\cos\theta)$　…… ①

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき　　$x=0\ (0\leqq y\leqq 1)$

① から　　$y=\sin\theta\left(1-\dfrac{x}{8\cos\theta}\right)$

$0<x<8$ である x を固定し，$x=8\cos\theta$ となるときの $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。

$0\leqq\theta\leqq\alpha$ であるとき　　$f(\theta)=\sin\theta\left(1-\dfrac{x}{8\cos\theta}\right)$

とし，$f(\theta)$ の変域を調べる。

$$\begin{aligned}f'(\theta)&=\cos\theta\left(1-\frac{x}{8\cos\theta}\right)-\frac{x}{8}\sin\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\\&=\cos\theta-\frac{x}{8}-\frac{x}{8}\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)\\&=\cos\theta-\frac{x}{8\cos^2\theta}=\frac{8\cos^3\theta-x}{8\cos^2\theta}\end{aligned}$$

$f'(\theta)=0$ とすると　　$\cos\theta=\sqrt[3]{\dfrac{x}{8}}$　…… ②

$0<x\leqq 8\cos\theta$ であるから　　$0<\sqrt[3]{\dfrac{x}{8}}<1$

よって，② を満たす $\theta\ (0<\theta<\alpha)$ がただ 1 つ存在するから，その θ を $\beta\ (0<\beta<\alpha)$ とすると，$0\leqq\theta\leqq\alpha$ における $f(\theta)$ の増減は次のようになる。

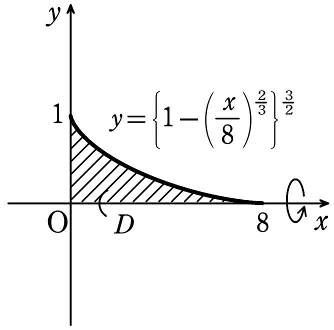
θ	0	$\cdots$	β	$\cdots$	α
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$	0	↗	極大	↘	0

したがって　　$0\leqq f(\theta)\leqq f(\beta)$

ここで　　$\sin\beta=(1-\cos^2\beta)^{\frac{1}{2}}=\left\{1-\left(\dfrac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}$

ゆえに　　$f(\beta)=\sin\beta\left(1-\dfrac{x}{8\cos\beta}\right)=\left\{1-\left(\dfrac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{1-\left(\dfrac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}\ =\left\{1-\left(\dfrac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}$

$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2}$ の場合も考えると，線分 PQ が通過する領域 D は，次の連立不等式で表される。



$$0\leqq y\leqq\left\{1-\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}},\ 0\leqq x\leqq 8$$

すなわち　　$\left(\dfrac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\leqq 1,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0$

したがって　　$V=\pi\displaystyle\int_0^8\left\{1-\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^3dx$

$\dfrac{x}{8}=t$ とおくと　　$dx=8dt$

x と t の対応は右のようになるから

x	$0\longrightarrow 8$
t	$0\longrightarrow 1$

$$V=\pi\int_0^1\left(1-t^{\frac{2}{3}}\right)^3\cdot 8dt=8\pi\int_0^1\left(1-3t^{\frac{2}{3}}+3t^{\frac{4}{3}}-t^2\right)dt$$

$$=8\pi\left[t-\frac{9}{5}t^{\frac{5}{3}}+\frac{9}{7}t^{\frac{7}{3}}-\frac{t^3}{3}\right]_0^1=8\pi\left(1-\frac{9}{5}+\frac{9}{7}-\frac{1}{3}\right)=\frac{128}{105}\pi$$

$\boxed{2}$

$\boxed{\text{解答}}$　(1)　$a_{-2}=1,\ a_{-1}=\log(\sqrt{2}+1)$　　(2)　略　　(3)　証明 略，$c_n=0$

(1)　$a_{-2}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2x}dx=\Big[\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=1$

$$a_{-1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\cos^2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1-\sin^2x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\log|1+\sin x|-\log|1-\sin x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)^2=\log(\sqrt{2}+1)$$

(2)　$a_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^nx\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x)'\cos^{n-1}x\,dx$

$$=\Big[\sin x\cos^{n-1}x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2x\cos^{n-2}x\,dx$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos^2x)\cos^{n-2}x\,dx$$

$$=2^{-\frac{n}{2}}+(n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^{n-2}x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^n x\,dx\right)$$

$$=2^{-\frac{n}{2}}+(n-1)a_{n-2}-(n-1)a_n$$

よって　　$na_n=2^{-\frac{n}{2}}+(n-1)a_{n-2}$

(3)　有理数 b_n，c_n によって，a_{2n} が $a_{2n}=b_n+\pi c_n$ …… ① と表されることを示す。

$n=0$ のとき $a_0=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=\frac{\pi}{4}$ であるから，$b_0=0$，$c_0=\frac{1}{4}$ とすれば ① の形に表される。

次に，$n>0$，$n<0$ のときに分けて，数学的帰納法を用いて ① の形に表されることを示す。

(i)　$n>0$ の場合

[1]　$n=1$ のとき

$$a_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\pi$$

よって，$b_1=\frac{1}{4}$，$c_1=\frac{1}{8}$ とすれば，a_2 は ① の形に表される。

[2]　$n=k\,(k>0)$ のとき，a_{2k} が ① の形に表されると仮定する。

すなわち b_k，c_k を有理数として　　$a_{2k}=b_k+\pi c_k$

(2) より　　$(2k+2)a_{2(k+1)}=2^{-\frac{2(k+1)}{2}}+(2k+1)a_{2k}$

$(2k+2)a_{2(k+1)}=2^{-(k+1)}+(2k+1)(b_k+\pi c_k)$

よって　　$a_{2(k+1)}=\frac{2^{-(k+1)}}{2k+2}+\frac{2k+1}{2k+2}b_k+\pi\frac{2k+1}{2k+2}c_k$

k，b_k，c_k は有理数であるから，

$$b_{k+1}=\frac{2^{-(k+1)}}{2k+2}+\frac{2k+1}{2k+2}b_k,\qquad c_{k+1}=\frac{2k+1}{2k+2}c_k$$

とおくと，b_{k+1}，c_{k+1} も有理数である。

よって，有理数 b_{k+1}，c_{k+1} によって　$a_{2(k+1)}=b_{k+1}+\pi c_{k+1}$　と表される。

[1], [2] より，$n>0$ であるすべての整数 n について，a_{2n} は ① の形に表される。

(ii)　$n<0$ の場合

[3]　$n=-1$ のとき

(1) から　　$a_{-2}=1$

よって，$b_{-1}=1$，$c_{-1}=0$ とすれば，a_{-2} は ① の形に表される。

[4]　$n=-k\,(k>0)$ のとき，a_{-2k} が ① の形に表されると仮定する。

すなわち b_{-k}，c_{-k} を有理数として

$$a_{-2k}=b_{-k}+\pi c_{-k}$$

(2) より　　$-2ka_{-2k}=2^{-\frac{-2k}{2}}+(-2k-1)a_{-2k-2}$

よって　　$(2k+1)a_{-2(k+1)}=2^k+2ka_{-2k}$

$$(2k+1)a_{-2(k+1)}=2^k+2k(b_{-k}+\pi c_{-k})$$

ゆえに　$a_{-2(k+1)}=\dfrac{2^k+2kb_{-k}}{2k+1}+\pi\dfrac{2k}{2k+1}c_{-k}$

k, b_{-k}, c_{-k} は有理数であるから,

$$b_{-(k+1)}=\frac{2^k+2kb_{-k}}{2k+1},\quad c_{-(k+1)}=\frac{2k}{2k+1}c_{-k}$$

とおくと, $b_{-(k+1)}$, $c_{-(k+1)}$ も有理数である。

よって, 有理数 $b_{-(k+1)}$, $c_{-(k+1)}$ によって

$a_{-2(k+1)}=b_{-(k+1)}+\pi c_{-(k+1)}$　と表される。

[3], [4] より, $n<0$ であるすべての整数 n について, a_{2n} は ① の形に表される。

以上から, すべての整数 n について, 有理数 b_n, c_n によって, a_{2n} は

$a_{2n}=b_n+\pi c_n$　と表される。

また, $n<0$ のとき　$c_{n-1}=\dfrac{-2n}{-2n+1}c_n$

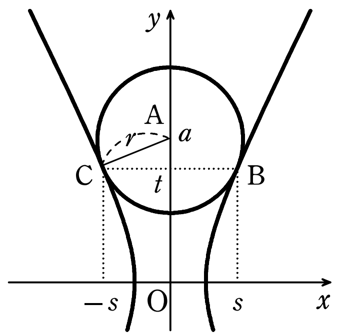
ここで, $a_{-2}=1$ より　$c_{-1}=0$

よって, $n<0$ であるすべての整数について　$c_n=0$

3

解答　(1)　$r=\sqrt{\dfrac{1+a^2+b^2}{1+b^2}}$, $s=\sqrt{1+\dfrac{a^2b^2}{(1+b^2)^2}}$, $t=\dfrac{ab^2}{1+b^2}$　(2)　$0<b<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(1)　[解 1]　点 A $(0,\ a)$ を中心とする半径 r の円の方程式は



$$x^2+(y-a)^2=r^2$$

両辺を x で微分すると

$$2x+2(y-a)\frac{dy}{dx}=0$$

$y\neq a$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y-a}$$

また, $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の両辺を x で微分すると　$2x-\dfrac{2y}{b^2}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

$y\neq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b^2x}{y}$

双曲線と円が点 B $(s,\ t)$ で接するので

$$s^2+(t-a)^2=r^2 \quad \cdots\cdots ①$$

$$s^2-\frac{t^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots ②$$

$$-\frac{s}{t-a}=\frac{b^2s}{t} \quad \cdots\cdots ③$$

$s\neq 0$ であるから ③ より　$-t=b^2(t-a)$

よって　　$t=\dfrac{ab^2}{1+b^2}$　……④

②，④から　　$s^2=1+\dfrac{a^2b^2}{(1+b^2)^2}$

$s>0$ であるから　　$s=\sqrt{1+\dfrac{a^2b^2}{(1+b^2)^2}}$　……⑤

①，④，⑤から

$$r^2=1+\frac{a^2b^2}{(1+b^2)^2}+\frac{a^2}{(1+b^2)^2}=\frac{1+a^2+b^2}{1+b^2}$$

$r>0$ であるから　　$r=\sqrt{\dfrac{1+a^2+b^2}{1+b^2}}$

[解 2]　B$(s,\ t)$ における双曲線の接線の方程式は

$$sx-\frac{ty}{b^2}=1$$

よって，B$(s,\ t)$ における法線の方程式は

$$\frac{t}{b^2}(x-s)+s(y-t)=0$$

この法線が円の中心 A$(0,\ a)$ を通るから

$$-\frac{st}{b^2}+s(a-t)=0$$

$s\neq 0$ であるから　　$-t+b^2(a-t)=0$

よって　　$t=\dfrac{ab^2}{1+b^2}$

$(s,\ t)$ は双曲線 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上にあるから

$$s^2-\frac{t^2}{b^2}=1$$

$s>0$ であるから　　$s=\sqrt{1+\dfrac{t^2}{b^2}}=\sqrt{1+\dfrac{a^2b^2}{(1+b^2)^2}}$

2 点 A，B の距離が円の半径 r に等しいので

$$r^2=s^2+(t-a)^2=1+\frac{a^2b^2}{(1+b^2)^2}+\left(\frac{ab^2}{1+b^2}-a\right)^2$$

$$=1+\frac{a^2b^2}{(1+b^2)^2}+\frac{a^2}{(1+b^2)^2}=1+\frac{a^2}{1+b^2}=\frac{1+a^2+b^2}{1+b^2}$$

$r>0$ であるから　　$r=\sqrt{\dfrac{1+a^2+b^2}{1+b^2}}$

(2)　AB＝AC は常に成り立つから，△ABC が正三角形となる条件は AB＝BC が成り立つことである。

よって　　$r=2s$　　　$s>0$，$r>0$ より　　$r^2=4s^2$

(1) の結果を代入して　$\dfrac{1+a^2+b^2}{1+b^2}=4\left\{1+\dfrac{a^2b^2}{(1+b^2)^2}\right\}$

分母を払って　　　$(1+b^2)(1+a^2+b^2)=4\{(1+b^2)^2+a^2b^2\}$

a について整理すると　　$(1-3b^2)a^2=3(1+b^2)^2$

この式を満たすような正の実数 a が存在するためには

$3(1+b^2)^2>0$ であるから　　$1-3b^2>0$

これを解いて　　$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}<b<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$b>0$ であるから　　$0<b<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

このとき (1) の結果から r も存在する。

したがって，求める b の値の範囲は　　$0<b<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\boxed{4}$

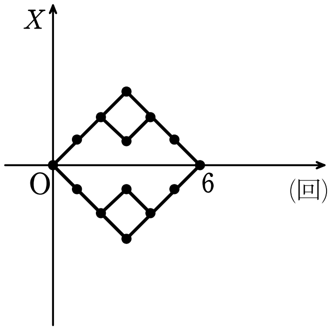
解答　(1) $\dfrac{63}{256}$　　(2) $\dfrac{1}{16}$　　(3) $\dfrac{7}{256}$

(1)　奇数，偶数ともに 5 回ずつ出る場合であるから，求める確率は

$$ {}_{10}\mathrm{C}_5\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=252\times\frac{1}{2^{10}}=\frac{63}{256}$$

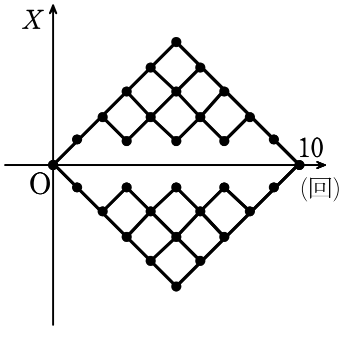
(2)　$X(6)=0$ となるためには，奇数，偶数ともに 3 回ずつ出ればよいが，条件を満たす偶奇の起こる順の決め方は，右図の経路の数と同じで 4 通り。
求める確率は

$$4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{16}$$



(3)　(1) と同様に奇数，偶数ともに 5 回ずつ出ればよいが，起こる順の決め方は，右図の経路の数と同じ 28 通り。
求める確率は

$$28\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{7}{256}$$



$\boxed{5}$

解答　(1) $S(0)=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

(2) $S(1)=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}-\vec{a}|^2|\vec{c}-\vec{a}|^2-\{(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})\}^2}$　　(3) $t=\dfrac{1}{3}$

(1)　$S(0)$ は △OABの面積に等しい。$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とすると

$$S(0)=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

(2)　$S(1)$ は △ABCの面積に等しいから，(1) の結果の $\vec{a}$ を $\vec{b}-\vec{a}$ で，$\vec{b}$ を $\vec{c}-\vec{a}$ でそれぞれおき換えて

$$S(1)=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}-\vec{a}|^2|\vec{c}-\vec{a}|^2-\{(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})\}^2}$$

$\boxed{\text{参考}}$　次の表し方でも正しい。

$$S(1)=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}-\vec{b}|^2|\vec{c}-\vec{b}|^2-\{(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b})\}^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}-\vec{c}|^2|\vec{b}-\vec{c}|^2-\{(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})\}^2}$$

(3)　(2) の結果の $\vec{c}$ を $t\vec{c}$ におき換えて

$$S(t)=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}-\vec{a}|^2|t\vec{c}-\vec{a}|^2-\{(\vec{b}-\vec{a})\cdot(t\vec{c}-\vec{a})\}^2}$$

ここで，$\vec{b}-\vec{a}=(-1,\ 1,\ 0)$，$t\vec{c}-\vec{a}=(t-1,\ t,\ t)$ であるから

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2=2,\quad |t\vec{c}-\vec{a}|^2=(t-1)^2+t^2+t^2=3t^2-2t+1,$$

$$(\vec{b}-\vec{a})\cdot(t\vec{c}-\vec{a})=-(t-1)+t=1$$

よって　$S(t)=\frac{1}{2}\sqrt{2(3t^2-2t+1)-1}=\frac{1}{2}\sqrt{6t^2-4t+1}=\frac{1}{2}\sqrt{6\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}}$

したがって，$S(t)$ は $t=\frac{1}{3}$ のとき最小となる。