第4回　大阪医科大演習

1

実数 θ が動くとき，xy 平面上の動点 $\mathrm{P}(0,\ \sin\theta)$ および $\mathrm{Q}(8\cos\theta,\ 0)$ を考える。θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，平面内で線分 PQ が通過する部分を D とする。D を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

2

整数 n に対して，a_n を次の式で定義する。

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^n x\, dx$$

(1)　a_{-2} と a_{-1} を求めよ。

(2)　$na_n = 2^{-\frac{n}{2}} + (n-1)a_{n-2}$ が成り立つことを示せ。

(3)　$a_{2n} = b_n + \pi c_n$ (ただし b_n，c_n は有理数) と表されることを示せ。また $n<0$ のときの c_n を求めよ。必要ならば π が無理数であることを用いてよい。

3

$a>0$，$b>0$ とする。点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ を中心とする半径 r の円が，双曲線 $x^2 - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ と 2 点 $\mathrm{B}(s,\ t)$，$\mathrm{C}(-s,\ t)$ で接しているとする。ただし，$s>0$ とする。ここで，双曲線と円が点 P で接するとは，P が双曲線と円の共有点であり，かつ点 P における双曲線の接線と点 P における円の接線が一致することである。

(1)　r，s，t を，a と b を用いて表せ。

(2)　$\triangle\mathrm{ABC}$ が正三角形となる a と r が存在するような b の値の範囲を求めよ。

4

数直線の原点上にある点が，以下の規則で移動する試行を考える。

(規則)　さいころを振って出た目が奇数の場合は，正の方向に 1 移動し，出た目が偶数の場合は，負の方向に 1 移動する。

k 回の試行の後の，点の座標を $X(k)$ とする。

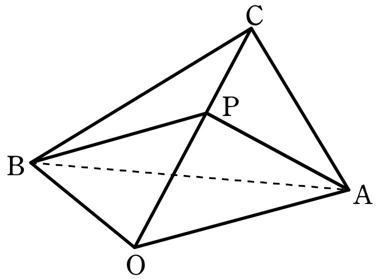
(1)　$X(10)=0$ である確率を求めよ。

(2)　$X(1) \fallingdotseq 0$，$X(2) \fallingdotseq 0$，……，$X(5) \fallingdotseq 0$ であって，かつ，$X(6)=0$ となる確率を求めよ。

(3)　$X(1) \fallingdotseq 0$，$X(2) \fallingdotseq 0$，……，$X(9) \fallingdotseq 0$ であって，かつ，$X(10)=0$ となる確率を求めよ。

$\boxed{5}$

四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。$0 \leqq t \leqq 1$ なる実数 t に対して，点 P を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{c}$ により定める。三角形 ABP の面積を $S(t)$ とするとき，次の問いに答えよ。



(1) $S(0)$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) $S(1)$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) O (0，0，0)，A (1，0，0)，B (0，1，0)，C (1，1，1) とするとき，$0 \leqq t \leqq 1$ において $S(t)$ が最小となる t の値を求めよ。