近大直前演習　　※４は補充問題

1

定数 a $(a<1)$，b，c に対し，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=x^3-(a+2)x^2+(2a+b)x-a+c$$

と定める。曲線 C：$y=f(x)$ は点 A $(1,\ 3)$ を通り，点 A において直線 ℓ：$y=2x+1$ と接しているとする。曲線 C と直線 ℓ の共有点のうち，点 A と異なる点を B とする。

(1)　b，c の値を求めよ。

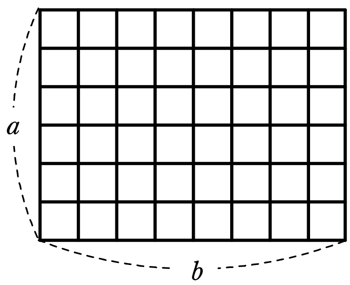
(2)　点 B の座標を a を用いて表せ。

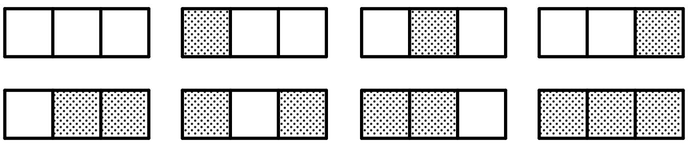
(3)　曲線 C と直線 ℓ で囲まれた部分の面積 S_1 を，a を用いて表せ。

(4)　x が $a<x<1$ の範囲を動くとき，3 点 P$(x,\ f(x))$，A，B がつくる三角形 PAB の面積の最大値を S_2 とする。S_2 と，(3) で求めた面積 S_1 に対して，$\dfrac{S_2}{S_1}$ の値を求めよ。

2

自然数 a，b (ただし $a<b$) に対して，1 辺の長さが 1 の正方形を右の図のように (内部が重ならないように) 敷き詰めて，縦の辺の長さが a で横の辺の長さが b の長方形を作る。そして長方形を構成する ab 個の正方形を白色または黒色に塗り分ける方法 (模様と呼ぶ) の数について考える。例えば，$a=1$，$b=3$ の場合には，





の 8 通りの模様が可能である。a，b がどちらも偶数のとき，次の問いに答えよ。

(1)　何通りの模様が可能か。

(2)　点対称な模様は何通りあるか。

(3)　線対称な模様は何通りあるか。

(4)　点対称でも線対称でもない模様は何通りあるか。

3

1 辺の長さが 1 の正三角形 OAB がある。P，Q をそれぞれ辺 OA，OB 上の点とし，M を線分 PQ 上の点とする。$s=\mathrm{OP}$，$t=\mathrm{OQ}$，$x=\mathrm{QM}$，$y=\mathrm{OM}$，$\theta=\angle\mathrm{OMP}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) PQ の長さを s，t で表せ。　　(2) t を x，y，$\cos\theta$ で表せ。

(3) M を PQ の中点とする。y を s，t で表せ。

(4) M を (3) と同じものとし，$s+t=1$ とする。このときの y の最小値を求めよ。

4

1 辺の長さが 1 の正二十面体 W のすべての頂点が球 S の表面上にあるとき，次の問いに答えよ。なお，正二十面体は，すべての面が合同な正三角形であり，各頂点は 5 つの正三角形に共有されている。

(1) 正二十面体の頂点の総数を求めよ。

(2) 正二十面体 W の 1 つの頂点を A，頂点 A からの距離が 1 である 5 つの頂点を B，C，D，E，F とする。$\sin 36^\circ=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ を用いて，正五角形 BCDEF の外接円の半径 R と対角線 BE の長さを求めよ。

(3) 2 つの頂点 D，E からの距離が 1 である 2 つの頂点のうち，頂点 A でない方を G とする。球 S の直径 BG の長さを求めよ。

(4) 球 S の中心を O とする。△DEG を底面とする三角錐 ODEG の体積を求めよ。