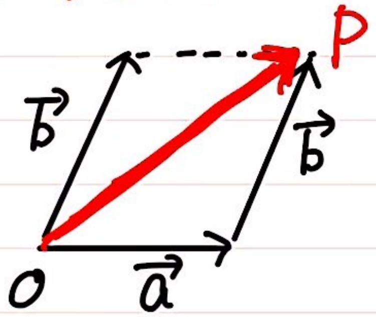
和，差，実数倍

・和 …作図的には矢印をつなぐ

・$\overrightarrow{OP} = \vec{a} + \vec{b}$

O からみた P の位置は
$\vec{a}$ の方向に1つ進み
さらに $\vec{b}$ の方向に1つ
進んだところ

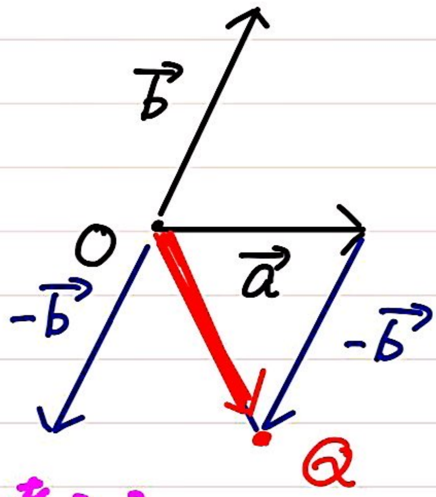


・差

$\overrightarrow{OQ} = \vec{a} - \vec{b}$

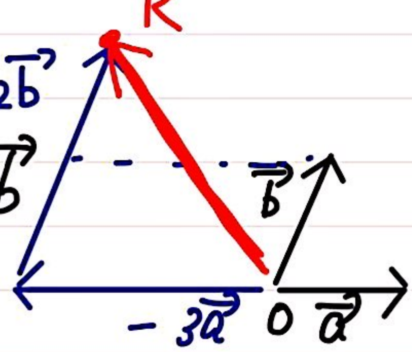
$= \vec{a} + (-\vec{b})$

「逆ベクトルをたす」と考える



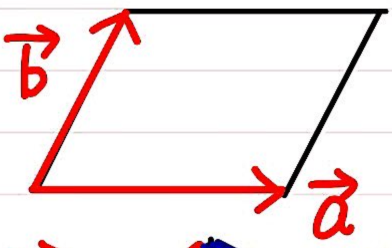
・実数倍

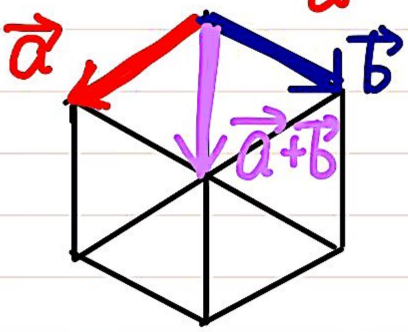
$\overrightarrow{OR} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$



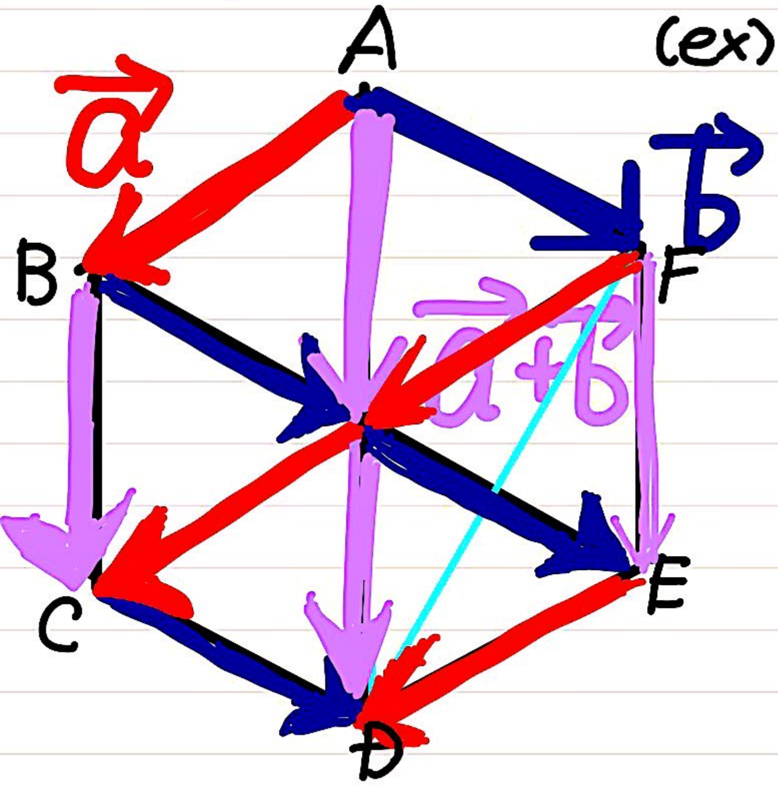
平行四辺形・正6角形・平行6面体のベクトル

…辺を伝って、ベクトルをつなげ





→正6角形はこの3つのベクトルをつなぎ合わせる!!



(ex)

- $\overrightarrow{FD} = (\vec{a}+\vec{b}) + \vec{a}$

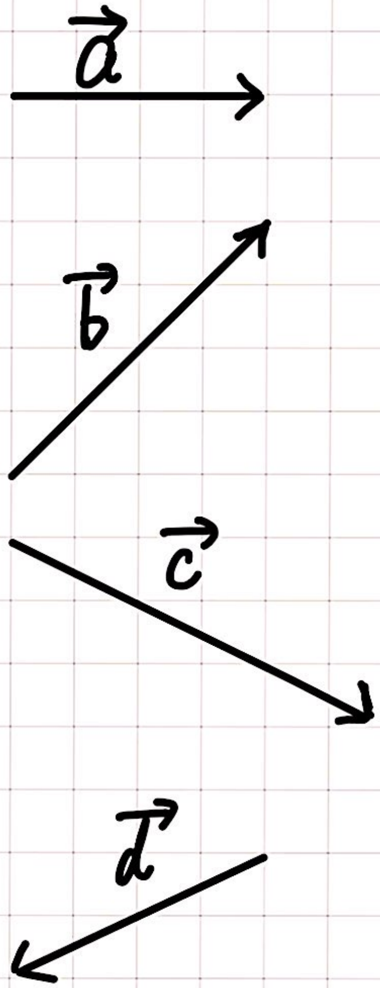
$$= 2\vec{a}+\vec{b}$$

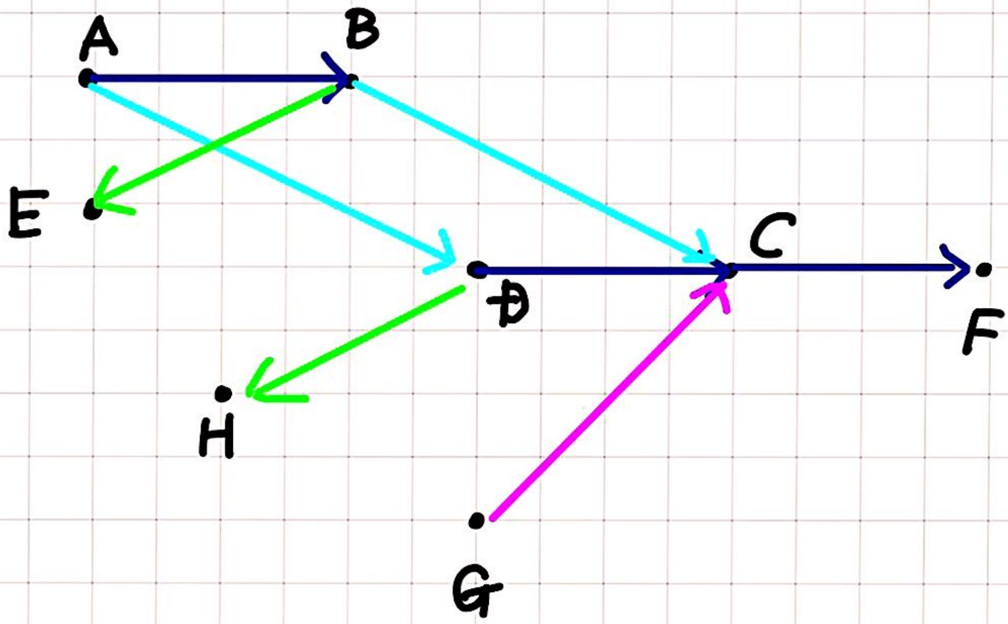
- $\overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{AE}$

$$= -\{\vec{b} + (\vec{a}+\vec{b})\}$$

$$= -\vec{a} - 2\vec{b}$$

同じベクトルをチョイス





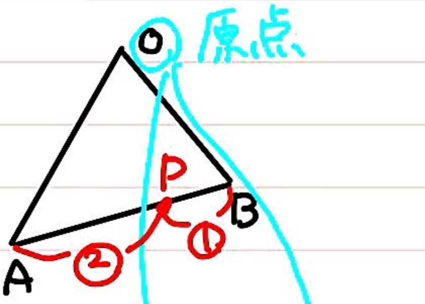
- $\overrightarrow{AB} =$
- $\overrightarrow{BC} =$
- $\overrightarrow{AD} =$
- $\overrightarrow{BE} =$
- $\overrightarrow{DH} =$
- $\overrightarrow{DC} =$
- $\overrightarrow{CF} =$
- $\overrightarrow{GC} =$

位置ベクトルを求める1歩目

--> 「直線上」「線分上」などの位置ベクトルを求める1歩目は
① まず、原点から何らかのルートを開通させる
② 比の条件をはめる　(わからないときは文字でおく)
③ 始点を全て原点に統一

トレーニング

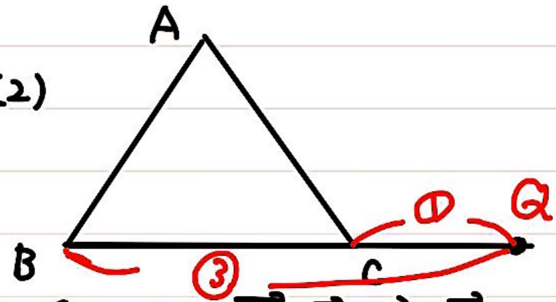
(1)



基準ベクトル $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$
Pを求めるとき…

① $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$
② $\quad=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$
③ $\quad=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$
$\quad=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$

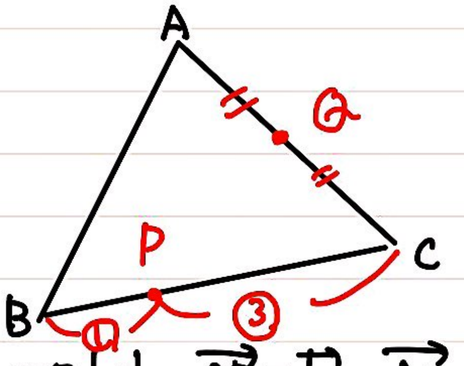
(2)



基準ベクトル $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$
Qを求めるとき
(QはBCを3:1に外分)

① $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}$
② $\quad=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$
③ $\quad=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$
$\quad=-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}$

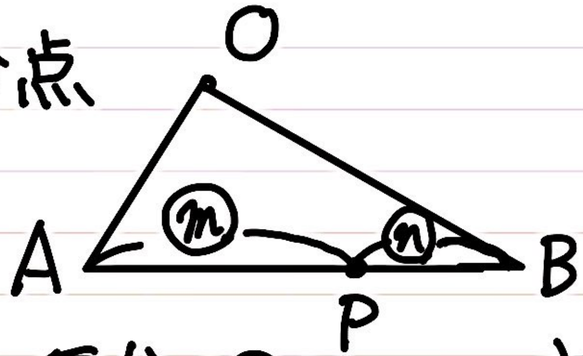
(3)



基準ベクトル $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$
$\overrightarrow{PQ}$ を求めよ

① $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CQ}$
② $\quad=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$
③ $\quad=\frac{3}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})+\frac{1}{2}(-\overrightarrow{AC})$
$\quad=-\frac{3}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$

〈1〉分点



Pが線分ABを$m:n$に内分

$$\overrightarrow{OP} = \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m+n}$$

$$\left(\begin{aligned} &\overrightarrow{AP} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB} \\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA} = \frac{n}{m+n}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}) \end{aligned}\right)$$

外分のときは

$m:n$に外分

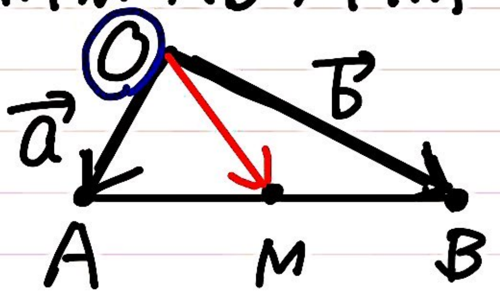
$\shortparallel$

$m:-n$に内分

と考えて当てはめる

〈2〉中点、---> 平均とる

Mが ABの中点、 ∘∘ $M = \dfrac{A+B}{2}$

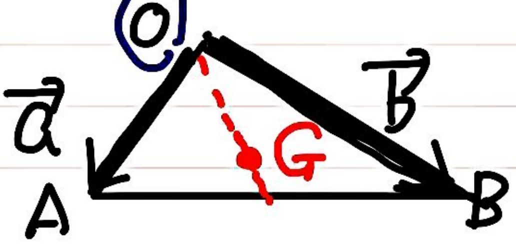


$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

〈3〉重心 ---> 3頂点の平均とる

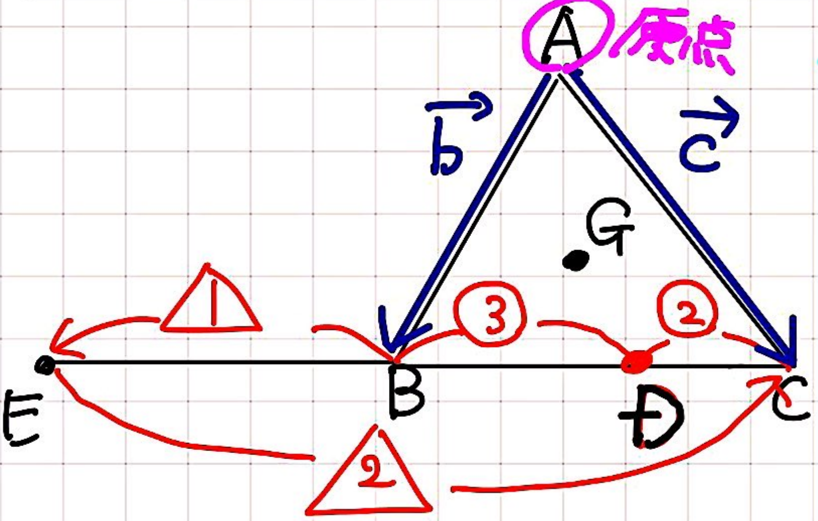
Gが△OABの重心 ∘∘ $G = \dfrac{O+A+B}{3}$

$\vec{0}$



$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}$$

△ABCについて、辺BCを3:2に内分する点をD、辺BCを1:2に外分する点をE、△ABCの重心をGとする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$として次のベクトルを$\vec{b}$, $\vec{c}$で表せ。$\overrightarrow{GE}$, $\overrightarrow{DG}$



▷point◁

・正しく図示 → D, E, G

・登場順に点の位置ベクトルを求める

・「比」を用いて、とにかく求めたいものを表して、始点をそろえてフォーマット

(解)

・D($\overrightarrow{AD}$)を求める。

まず、何らかの形でベクトルをつないで開通させる

「比」の条件を用いる

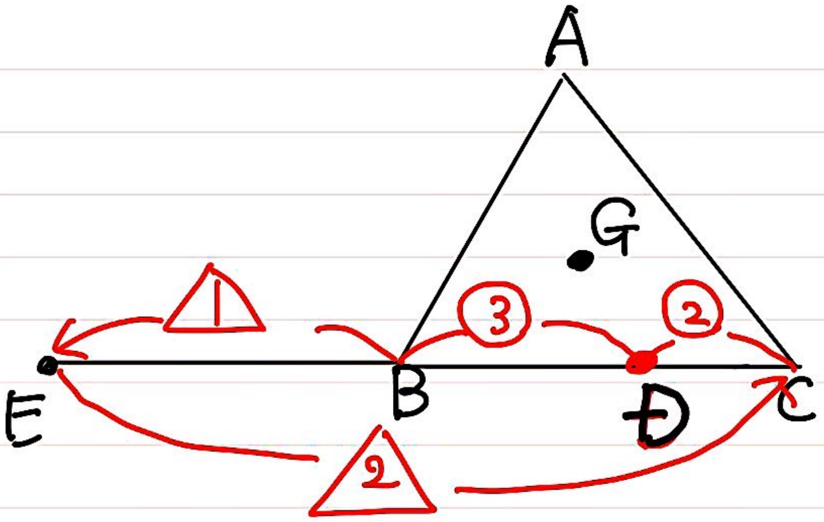
$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\boxed{\overrightarrow{BD}}=\overrightarrow{AB}+\boxed{\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}}$$

始点をAとする

$$=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c} \quad \cdots ①$$

※分点公式　DはBCを3:2に内分

$$\overrightarrow{AD}=\frac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{3+2}=\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c}$$



比の条件

・E ($\overrightarrow{AE}$) を求める

$$\overrightarrow{AE} = \underline{\overrightarrow{AB} + \boxed{\overrightarrow{BE}}} = \overrightarrow{AB} + \boxed{(-\overrightarrow{BC})}$$

$$= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

始点A

$$\underline{\overrightarrow{AE} = 2\vec{b} - \vec{c}} \quad \cdots ②$$

※分点公式　EはBCを1:2に外分
$=$ 1:−2に内分

$$\overrightarrow{AE} = \frac{(-2)\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AC}}{1 + (-2)} = \underline{2\vec{b} + \vec{c}}$$

・G ($\overrightarrow{AG}$) を求める.

③

Gは△ABCの重心 … $\boxed{\overrightarrow{AG} = \dfrac{\overset{\vec{0}}{\overrightarrow{AA}} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}} = \underline{\dfrac{1}{3}\vec{b} + \dfrac{1}{3}\vec{c}}$

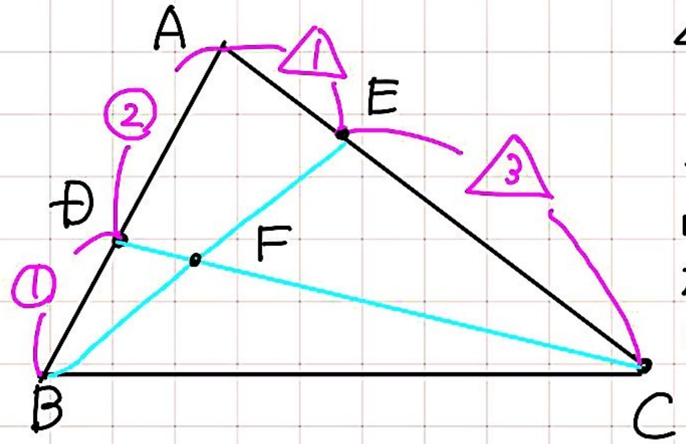
$$\therefore \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AG} = (2\vec{b} - \vec{c}) - \left(\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right)$$

$$= \underline{\frac{5}{3}\vec{b} - \frac{4}{3}\vec{c}} \quad \cdots (答)$$

$$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AD} = \left(\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) - \left(\frac{2}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}\right)$$

$$= \underline{-\frac{1}{15}\vec{b} - \frac{4}{15}\vec{c}} \quad \cdots (答)$$

2直線の交点の位置ベクトル



△ABC上に左図のような点D, Eをとり2直線BE, CDの交点をF, 直線AFと直線BCとの交点をGとする。

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき

(1) $\overrightarrow{AF}$ を $\vec{b}, \vec{c}$ で表せ

(2) $\overrightarrow{AG}$ を $\vec{b}, \vec{c}$ で表せ

- 登場順に点の位置ベクトルを求める。
- 「比」は実数倍，始点変えて。

---

(1) $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\vec{b}$,

$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\vec{c}$,

わからん比は文字でおく

Fは BE 上にあるので，

$$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\boxed{s\overrightarrow{BE}}$$

始点A

$$=\overrightarrow{AB}+s(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB})$$

$$=(1-s)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AE}$$

$$=(1-s)\vec{b}+\boxed{\tfrac{1}{4}s}\,\vec{c}$$

…①′

F は CD 上にあるので

わからん比は文字でおく

$$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AC}+\boxed{t\overrightarrow{CD}}$$

始点A

$$=\overrightarrow{AC}+t(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})$$

$$=(1-t)\overrightarrow{AC}+t\overrightarrow{AD}$$

$$=(1-t)\vec{c}+\frac{2}{3}t\vec{b}$$

$$=\frac{2}{3}t\,\vec{b}+\boxed{(1-t)}\,\vec{c}$$

…②′

$\vec{b}, \vec{c}$ が1次独立であるので

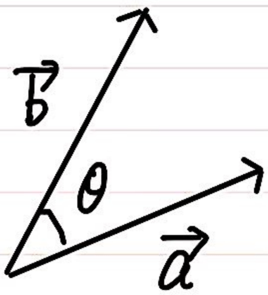
①′, ②′ の係数を比べる

$s=\frac{2}{5}$　$t=\frac{9}{10}$

$$\therefore\ \boxed{\overrightarrow{AF}=\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{1}{10}\vec{c}}$$

ベクトルの内積

定義



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

・かけ算ではない

・$\vec{a}\times\vec{b}$ とかかないこと

↳外積という全く別モノ

・コイツ何やねん？ というより何のために定められてんねん？

--→ ベクトルを用いて図形量を測るために，計算ルールを数式同様に扱えるように存在.

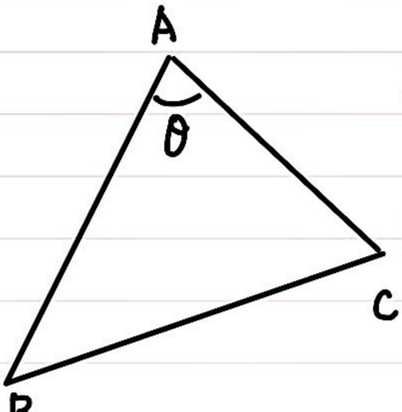
性質

・$\vec{a}(\vec{b}\pm\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

・$|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a}$

・$|s\vec{a}\pm t\vec{b}|^2 = (s\vec{a}+t\vec{b})(s\vec{a}+t\vec{b}) = s^2|\vec{a}|^2+2st\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$

--→ 式の展開が同じものの内積が $\vec{a}\cdot\vec{a} = (|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0^\circ) = |\vec{a}|^2$ となることに注意すると数式同様に扱うことが可



比べてみると…

余弦Th --> $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,\boxed{AB\cdot AC\cdot\cos\theta}$

$|\vec{BC}|^2 = |\vec{AC}-\vec{AB}|^2 = |\vec{AB}|^2 - 2\boxed{\vec{AB}\cdot\vec{AC}} + |\vec{AC}|^2$

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = |\vec{AB}||\vec{AC}|\cos\theta$ と定めればOK

ベクトルの基本ルーティーン

<1> 原点,基準ベクトルを定める。

<2> 基準ベクトルの大きさ,内積を求める ←

- 内積の定義
- 大きさ(絶対値)
  …2乗

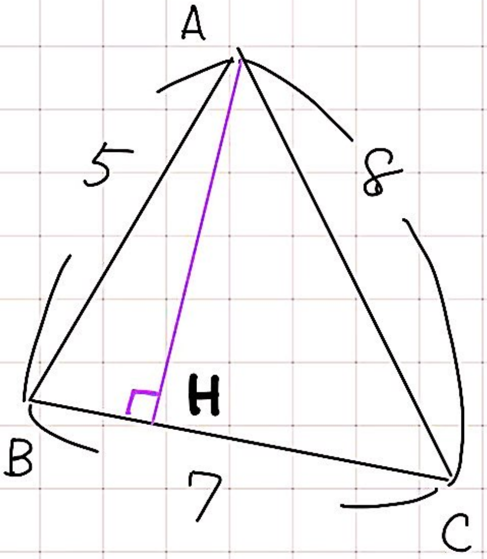
<3> 登場する,基準ベクトルに関係しない点の位置ベクトルを登場順(大体,アルファベット順)に求める。 ←

- 分点公式
- ベクトル方程式

<4> 求めたい図形量に関するベクトルを基準ベクトルで表す.

<5> それぞれの最終処理

垂線の足の位置ベクトル



AB = 5, BC = 7, CA = 8 をみたす△ABCがあり，
Aから直線BCに下ろした垂線の足をHとする。

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき
$\overrightarrow{AH}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ。

・長さ，角などに関する条件は全て基準ベクトル $\vec{b}$, $\vec{c}$ の条件に直す → 必ず初めに

準備

AB = 5 より， $|\vec{b}|=5$ …①

AC = 8 より， $|\vec{c}|=8$ …②

BC = 7 より， $|\overrightarrow{BC}|=7$

∴ $|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|=|\vec{c}-\vec{b}|=7$

2乗して，

$|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=49$

①，②より $\vec{b}\cdot\vec{c}=20$ …③

「初期条件を全て基べの大きさ，内積に還元。」

※ここからがメイン

(i) Hは直線BC上より

$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\boxed{\overrightarrow{BH}}=\overrightarrow{AB}+\boxed{s\overrightarrow{BC}}$ 始点A

$=\overrightarrow{AB}+s(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

∴ $\overrightarrow{AH}=(1-s)\vec{b}+s\vec{c}$

(ii) Hは，垂線上にあるので → 成立している垂直条件まとめかく

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

始点A

$\overrightarrow{AH}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=0$

$\{(1-s)\vec{b}+s\vec{c}\}(\vec{c}-\vec{b})=0$

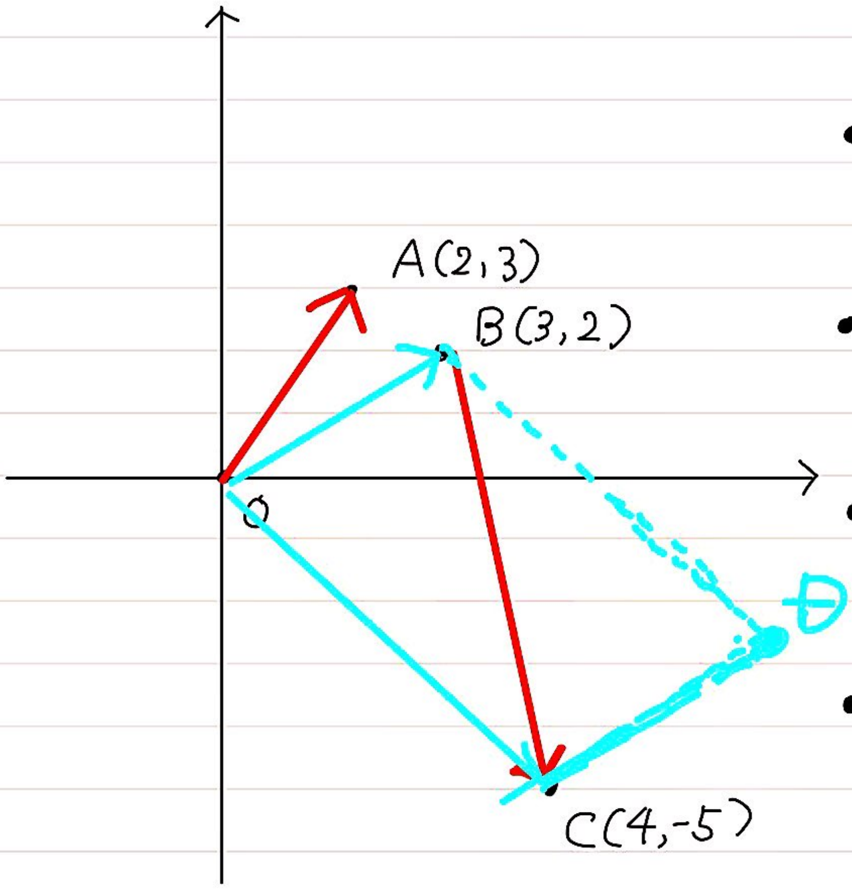
∴ $(s-1)\underset{25}{|\vec{b}|^2}+(1-2s)\underset{20}{\vec{b}\cdot\vec{c}}+s\underset{64}{|\vec{c}|^2}=0$

$49s-5=0$ 　 $s=\frac{5}{49}$

∴ $\overrightarrow{AH}=\frac{44}{49}\vec{b}+\frac{5}{49}\vec{c}$ (答)

ベクトルの成分

⋯→ x, y 座標系の中でベクトルを表す。



- $\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ ←-- x成分 ← y成分
- $\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{BO}=-\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{BC}=\underbrace{\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}}_{\text{始点O}}=\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

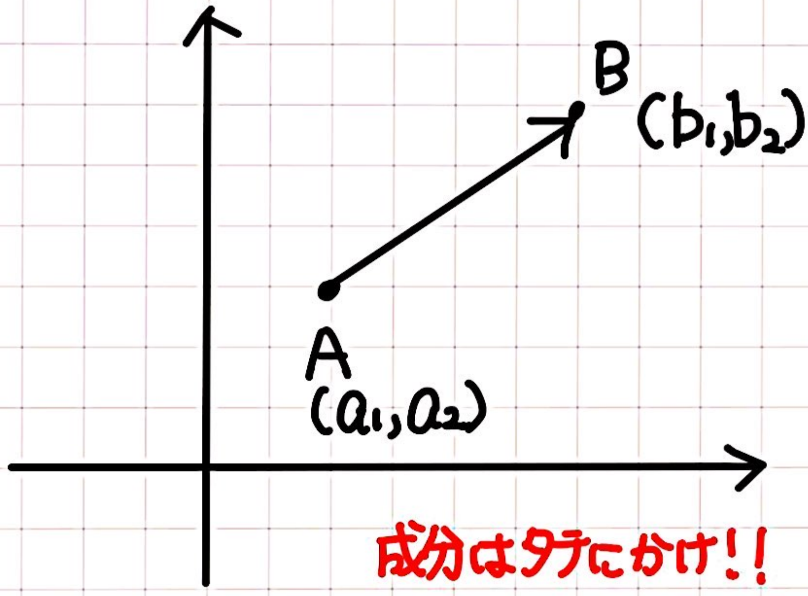
$=\begin{pmatrix}1\\-7\end{pmatrix}$

Dが平行四辺形OCDBの1頂点となるとき

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$$

$\therefore$ D(7, −3)

成分 … x, y 座標系でベクトルを用いる



$$\begin{array}{ccc} & \text{B} \quad \text{A} & \\ \overrightarrow{AB} = & \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \cdots x \\ \cdots y \end{matrix} \end{array}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\underbrace{(b_1-a_1)^2}_{x成分} + \underbrace{(b_2-a_2)^2}_{y成分}}$$

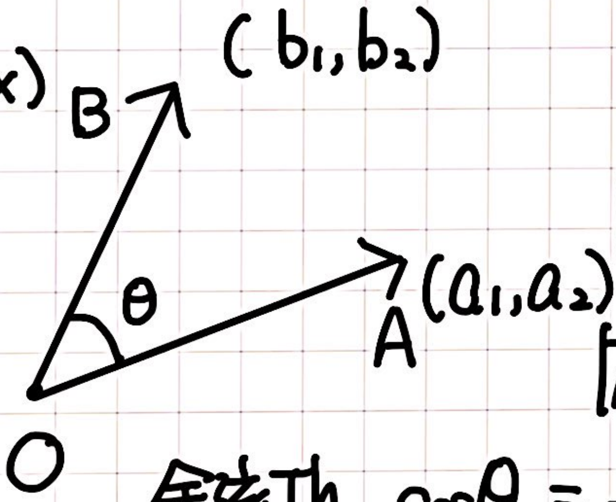
成分はタテにかけ!!

$\boxed{\text{内積}}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ ⋯>

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{array}{c} xの積 \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ yの積 \end{array} = a_1b_1 + a_2b_2$$

(ex)



$\cdot\ |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$\cdot\ |\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2}$

余弦Th $\cos\theta = \dfrac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2}{2|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{\cancel{2}(a_1b_1 + a_2b_2)}{\cancel{2}\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$

$\therefore\ \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = \cancel{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\,\cancel{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}\ \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\cancel{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\,\cancel{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}}$

$= a_1b_1 + a_2b_2$

ぶっちゃけ、ベクトルはこれができたらOK!!

• 和，差，実数倍

差 → 逆ベクトルをたす

実数倍 → 伸ばす，縮める

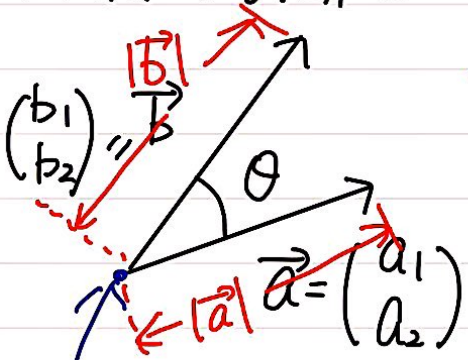
⇒ 始点変え

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{\circ Q} - \overrightarrow{\circ P}$

うしろ　まえ

○：その問題の原点

• 内積の計算ルール



内積は必ず始点をそろえる

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$= a_1b_1 + a_2b_2$ ← 成分アリ

a_1b_1：x成分の積　a_2b_2：y成分の積

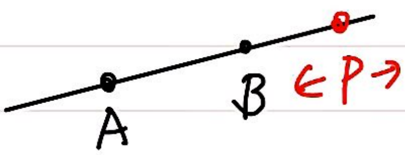
$$\Rightarrow \begin{cases} (\vec{a} \pm \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} \pm \vec{b} \cdot \vec{c} \\ |\vec{a} \pm \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \pm 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \quad \text{etc} \end{cases}$$

数式の展開みたいにいける

• ある点が直線上

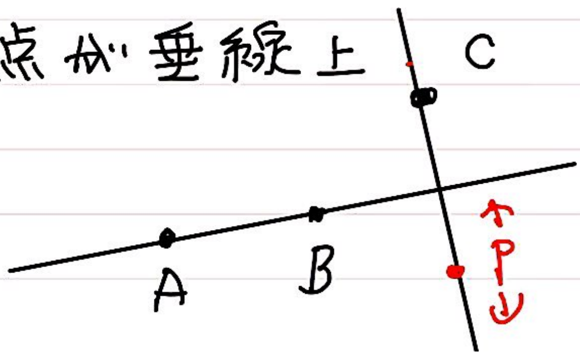
(ex) Pが直線AB上

$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB}$



• ある点が垂線上

その点がみたす垂直条件をまんまかく!!



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CP} = 0$

三角形の面積

$\vec{b}$

$\vec{a}$

$$\boxed{S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}}$$

$$\left(\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta)}\\&=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\end{aligned}\right)$$

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ のとき $\boxed{S=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|}$

へ…平行なら△できん!!

面積0じゃねえか!!

平行条件

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ のとき, $\boxed{\vec{b}=k\vec{a}\ (k\neq 0)}$

$\begin{pmatrix}ka_1\\ka_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$, $ka_1=b_1$, $ka_2=b_2$ より

$k=\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}$ $\therefore\ a_1b_2=a_2b_1$, $\boxed{a_1b_2-a_2b_1=0}$