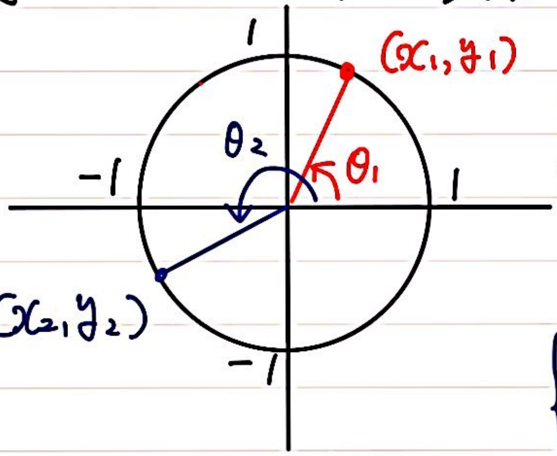
三角関数 超基本事項

1. 度数と弧度法

$180^\circ = \pi$ ⇢ $90^\circ = \frac{\pi}{2}$, $60^\circ = \frac{\pi}{3}$, $360^\circ = 2\pi$

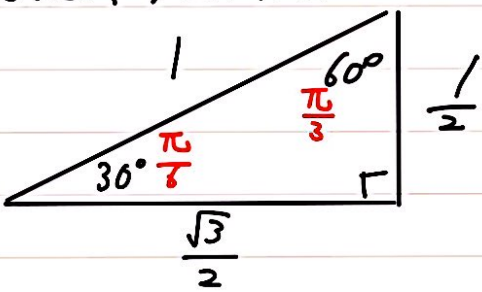
2. 定義 … 角を測って動径をとり単位円との交点を調べて

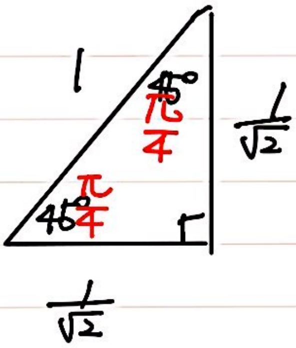


$$\begin{cases} x_1 = \cos\theta_1 \\ y_1 = \sin\theta_1 \\ \frac{y_1}{x_1}\text{(傾き)} = \tan\theta_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \cos\theta_2 \\ y_2 = \sin\theta_2 \\ \frac{y_2}{x_2}\text{(傾き)} = \tan\theta_2 \end{cases}$$

3. 代表角の三角比





を用いて測る

θ	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	×	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

4. 三角比ファミリー

- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ → $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$
- $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

三角関数のグラフ

$y = \sin x$ ⋯→ [・スタートが0 ・周期：2π] （中心線：$y=0$　振幅：1）

$y = A\sin(Bx+C)+D$

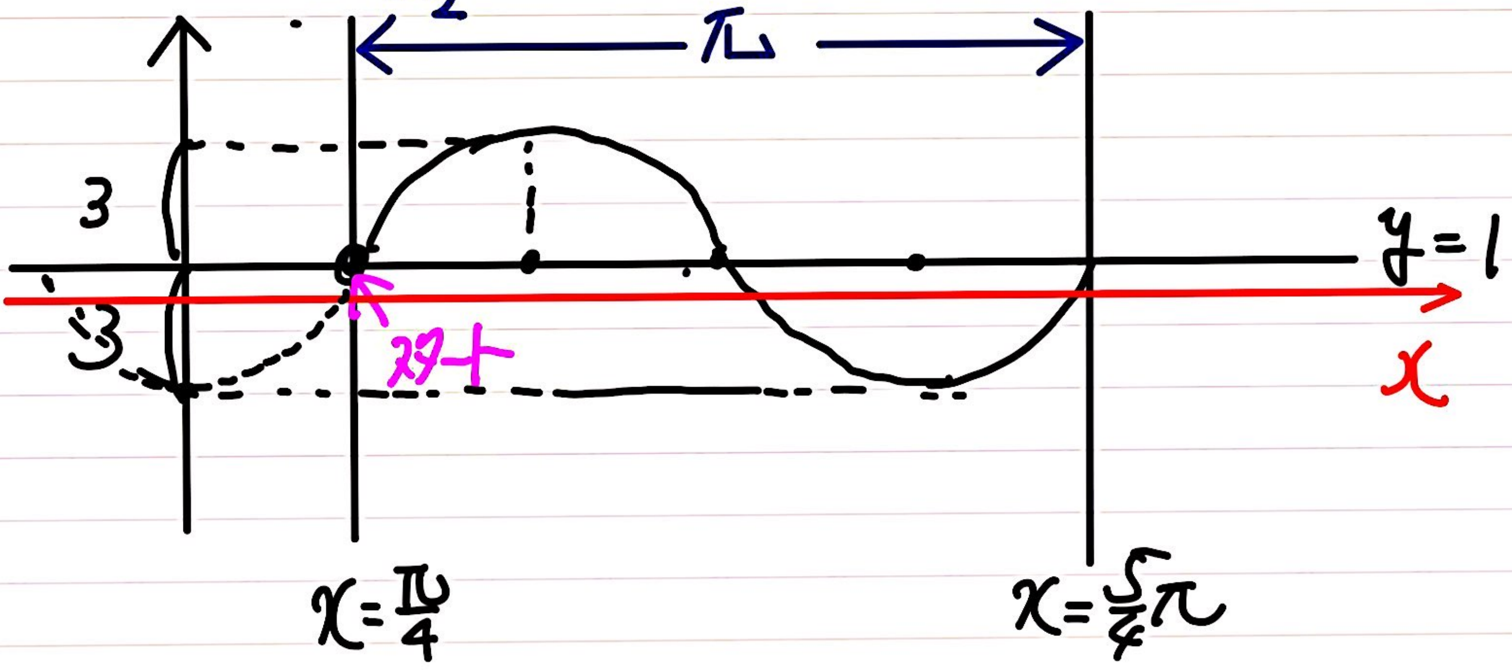
[・スタート：$\boxed{Bx+C}=0$
・周期：$\dfrac{2\pi}{B}$]

（中心線：$y=D$
振幅：A）

(ex) $y = 3\sin(2x-\frac{\pi}{2})+1$

$\underbrace{2x-\frac{\pi}{2}}_{=0}$ ⋯→ $2x-\frac{\pi}{2}=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ → スタート

$\dfrac{2\pi}{2}=\pi$ → 周期

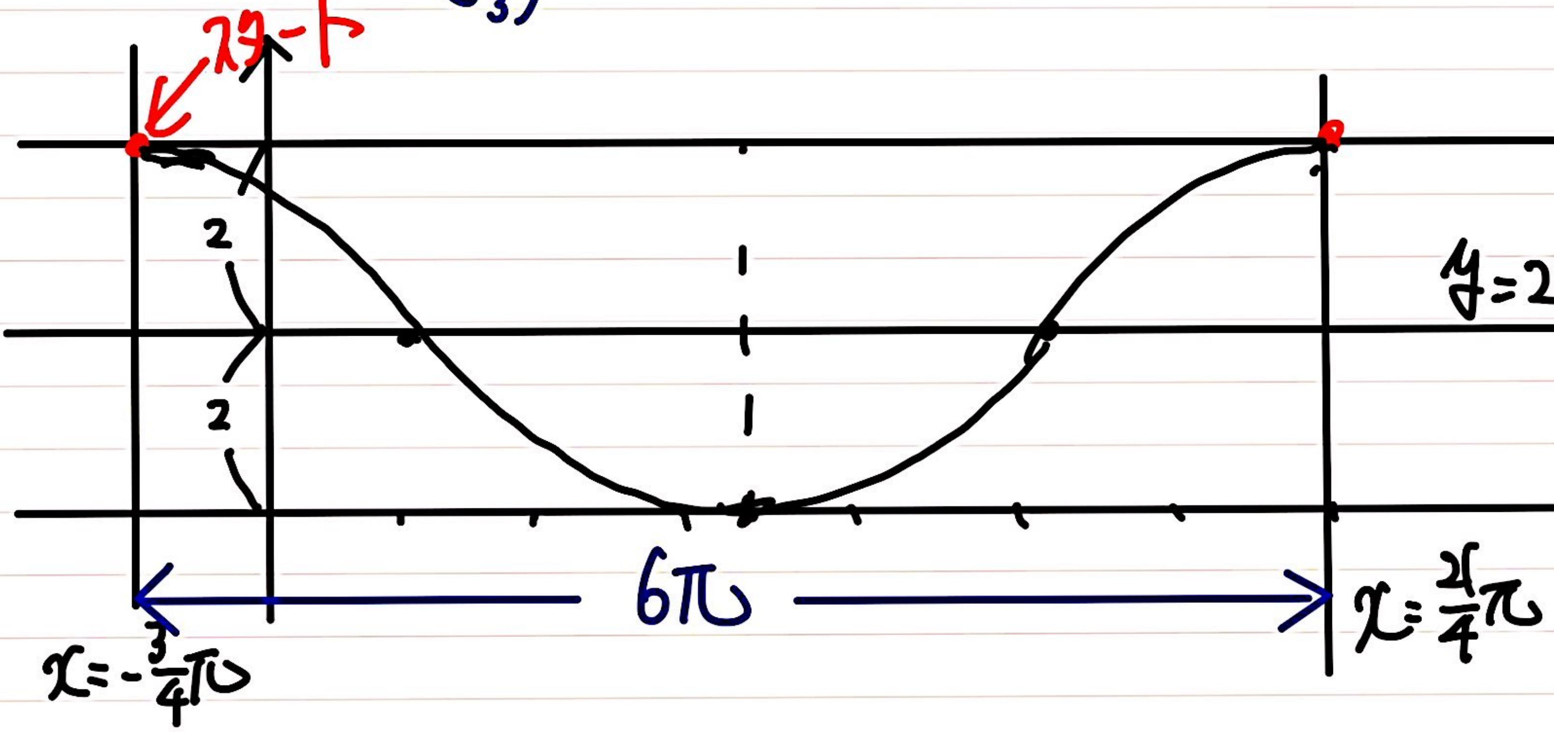


(ex) $y = 2\cos\left(\underbrace{\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}}_{\text{"}}\right) + 2$

$\frac{1}{3}x$

$0 \cdots x = -\frac{3}{4}\pi \rightarrow$ スタート

$\frac{2\pi}{\left(\frac{1}{3}\right)} = 6\pi \rightarrow$ 周期



描き方

① スタート, 1周期のポイントをとる

② 中心線をひく

③ x軸, y軸を後からひく

三角関数 加法定理etc.

そのまま

- $\sin(\bigcirc + \square) = \sin\bigcirc\cos\square + \cos\bigcirc\sin\square$ … ①
- $\sin(\bigcirc - \square) = \sin\bigcirc\cos\square - \cos\bigcirc\sin\square$ … ②

逆

- $\cos(\bigcirc + \square) = \cos\bigcirc\cos\square - \sin\bigcirc\sin\square$ … ③
- $\cos(\bigcirc - \square) = \cos\bigcirc\cos\square + \sin\bigcirc\sin\square$ … ④

①,③にて $\bigcirc = \square$ とする

倍角公式 / 半角公式

$$\sin 2\bigcirc = 2\sin\bigcirc\cos\bigcirc \longleftrightarrow \sin\bigcirc\cdot\cos\bigcirc = \frac{\sin 2\bigcirc}{2}$$

$$\cos 2\bigcirc = \begin{cases} 1 - 2\sin^2\bigcirc \longleftrightarrow \sin^2\bigcirc = \dfrac{1-\cos 2\bigcirc}{2} \\ 2\cos^2\bigcirc - 1 \longleftrightarrow \cos^2\bigcirc = \dfrac{1+\cos 2\bigcirc}{2} \end{cases}$$

$2\bigcirc \Rightarrow \bigcirc$　1次 ⇒ 2次　　$\bigcirc \Rightarrow 2\bigcirc$　2次 ⇒ 1次

※①で□を○にすると

…> $\sin(\bigcirc+\bigcirc) = \sin\bigcirc\cos\bigcirc + \cos\bigcirc\sin\bigcirc = 2\sin\bigcirc\cos\bigcirc$

③で□を○にすると

…> $\cos(\bigcirc+\bigcirc) = \cos\bigcirc\cos\bigcirc - \sin\bigcirc\sin\bigcirc = \overbrace{\cos^2\bigcirc}^{1-\sin^2\bigcirc} - \overbrace{\sin^2\bigcirc}^{1-\cos^2\bigcirc}$

三角関数の流れ

Type 1. 角をそろえる

① 角の統一 ← 倍角,半角公式など

② ・sin◎ または cos◎ のどちらかのみ → t=sin◎ とおく

・sin◎, cos◎ の対称式 → t=sin◎+cos◎ とおく

合成してtのハンイ

→ tの整式

・a sin◎ ± b cos◎ 形 → 合成

・その他,高次式 → 因数分解

③ 単位円の処理

ダメ

$\boxed{\text{別の角にそろえる}}$

Type 2. 角をそろえる

① 和積・積和公式

② 単位円の処理

三角関数の合成（sinに合成）

合成

・$\sin(\theta+\alpha) = \sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha$

合成

・$\sin(\theta-\alpha) = \sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha$

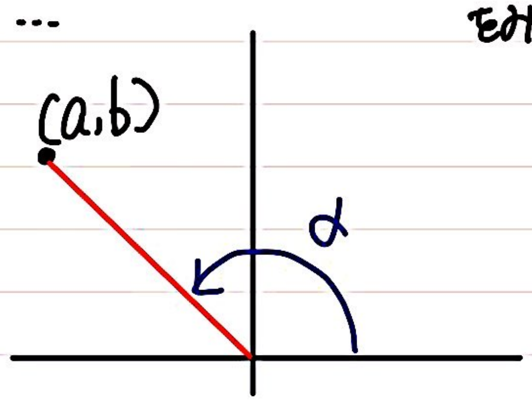
基本のフォーマット

$$\underbrace{a\sin\theta + b\cos\theta}_{\text{同じ角}} = \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{\text{覚える}}\sin(\theta+\alpha)$$

この角が争点になる

$$\underbrace{a\sin\theta - b\cos\theta}_{\text{同じ角}} = \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{\text{覚える}}\sin(\theta-\alpha)$$

・αは… をみたす



(ex)

・$\underbrace{\sqrt{3}}_{a}\sin\theta + \underbrace{1}_{b}\cos\theta = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\right)$

$\left(\sqrt{a^2+b^2} = 2\right)$

$= 2\left(\sin\theta\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\cos\alpha} + \cos\theta\cdot\underbrace{\frac{1}{2}}_{\sin\alpha}\right)$

$\alpha = \frac{\pi}{6}$

$= 2\sin(\theta+\alpha)$

(ex) 次の式を合成してみよう

(1) $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$

(2) $\sin\theta + \cos\theta$

(3) $3\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta$

(4) $\sin 2\theta - \sqrt{3}\cos 2\theta$

困ったときの最終兵器 … 和積公式，積和公式

1. 和積公式 ---> 和⇒積へ

これは覚えず
頭の中でmake
している

$$\sin\bigcirc + \sin\triangle = 2\sin\frac{\bigcirc+\triangle}{2}\cos\frac{\bigcirc-\triangle}{2}$$

$$\sin\bigcirc - \sin\triangle = 2\cos\frac{\bigcirc+\triangle}{2}\sin\frac{\bigcirc-\triangle}{2}$$

$$\cos\bigcirc + \cos\triangle = 2\cos\frac{\bigcirc+\triangle}{2}\cos\frac{\bigcirc-\triangle}{2}$$

$$\cos\bigcirc - \cos\triangle = -2\sin\frac{\bigcirc+\triangle}{2}\sin\frac{\bigcirc-\triangle}{2}$$

$$\square = \frac{\bigcirc+\triangle}{2}$$

$$\bigstar = \frac{\bigcirc-\triangle}{2}$$

として用いる

2. 積和公式 ---> 積⇒和へ

$$\sin\square\cos\bigstar = \frac{1}{2}\{\sin(\square+\bigstar)+\sin(\square-\bigstar)\}$$

$$\cos\square\sin\bigstar = \frac{1}{2}\{\sin(\square+\bigstar)-\sin(\square-\bigstar)\}$$

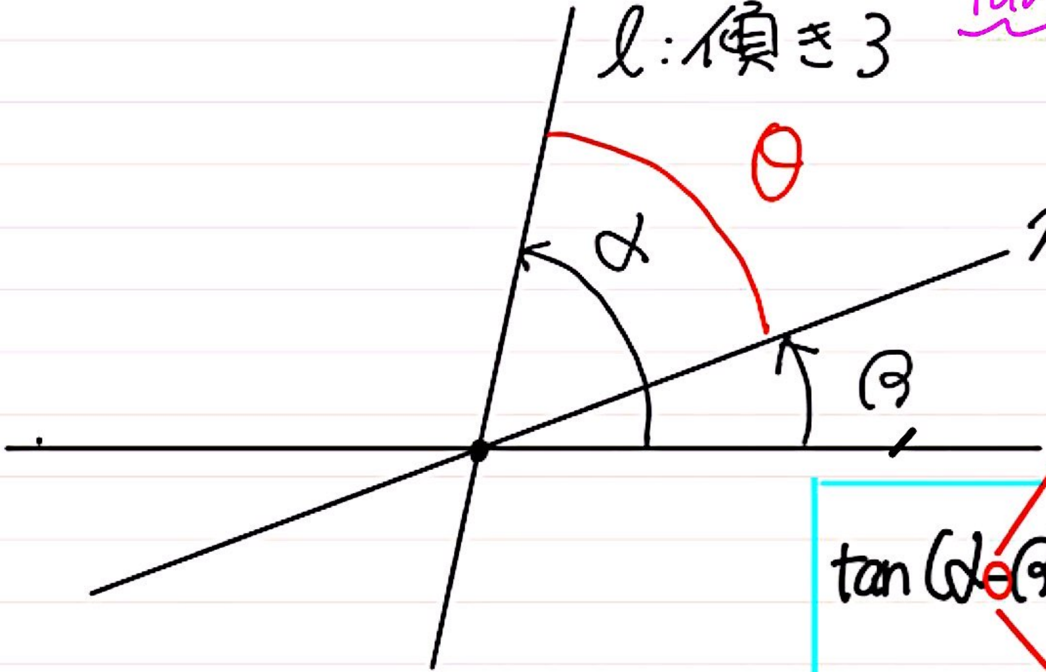
$$\cos\square\cos\bigstar = \frac{1}{2}\{\cos(\square+\bigstar)+\cos(\square-\bigstar)\}$$

$$\sin\square\sin\bigstar = -\frac{1}{2}\{\cos(\square+\bigstar)-\cos(\square-\bigstar)\}$$

1 or 2 をつくれるようにしておこう

素材は加法定理の＋，－ペアである!!

2直線のなす角



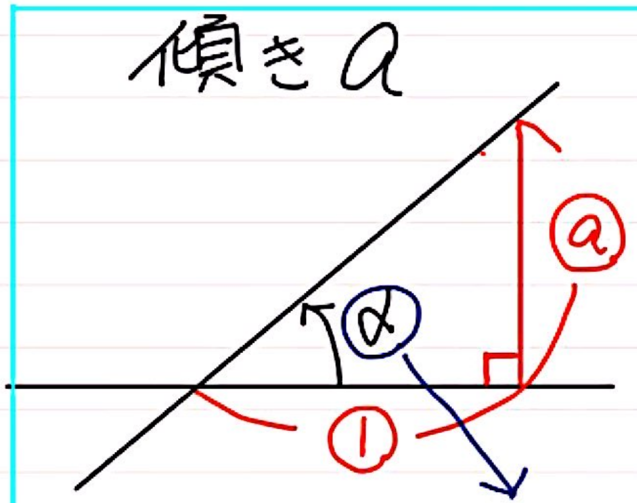
$\tan\theta = \tan(\alpha - \beta)$

$= 1$

そのまま

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

逆



x軸正方向と
反時計まわり

$a = \tan\alpha$

（解）$\tan\alpha = 3$　　$\tan\beta = \frac{1}{2}$　より

$\tan(\alpha - \beta) = 1$　　$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{4}$