埼玉医科前期　対策問題1

1 解答　$x^4-(ア)bx^3+(b^2+(イウ))x^2-(エオ)bx+324$

$x^4-2bx^3+(b^2+36)x^2-36bx+324$

(カキ)　85　(ク)　7　(ケ)　3　(コ)　5　(サ)　3　(シ)　5　(ス)　2

解説

(1)　$B^2=(x^2-bx+18)^2=x^4-{}^{ア}2bx^3+(b^2+{}^{イウ}36)x^2-{}^{エオ}36bx+324$

$C=A-B^2=(2b-14)x^3+(a-b^2-36)x^2+(36b-249)x+1$

よって，C が x についての1次式になるのは　$2b-14=0$，$a-b^2-36=0$　すなわち

$a={}^{カキ}85$，$b={}^{ク}7$ のときで，このとき　$C={}^{ケ}3x+1$

(2)　$f(n)-g(n)=n^2-10n+17$

よって　$(n-5)^2-8\leqq 0$ を満たす n は　$n=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$　　ゆえに　${}^{コ}5$ 個.

$f(n)$ と $g(n)$ の値の組 $(f(n),\ g(n))$ は

$n=3$ のとき　$(4,\ 8)$

$n=4$ のとき　$(5,\ 12)$

$n=5$ のとき　$(8,\ 16)$

$n=6$ のとき　$(13,\ 20)$

$n=7$ のとき　$(20,\ 24)$

よって，$n={}^{サ}3$，${}^{シ}5$ で　$\dfrac{g(3)}{f(3)}=\dfrac{g(5)}{f(5)}={}^{ス}2$

2 解答　$\dfrac{\sqrt{(ア)}}{(イウ)}$　$\dfrac{\sqrt{6}}{12}$　　$\dfrac{\sqrt{(エオカ)}}{(キク)}$　$\dfrac{\sqrt{138}}{12}$　　$\dfrac{(ケ)\sqrt{(コサ)}}{(シス)}$　$\dfrac{6\sqrt{46}}{23}$

(セ)　①　(ソ)　②　(タ)　⓪　(チ)$\sqrt{(ツ)}$　$2\sqrt{6}$　　$\dfrac{(テ)\sqrt{(ト)}}{(ナ)}$　$\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$

$\dfrac{(ニ)}{(ヌ)}$　$\dfrac{3}{4}$　　$\dfrac{(ネ)\sqrt{(ノ)}}{(ハ)}$　$\dfrac{3\sqrt{6}}{7}$　　$\dfrac{(ヒフ)\sqrt{(ヘ)}}{(ホ)}$　$\dfrac{12\sqrt{3}}{7}$

解説

△ABCにおいて，余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{ACB}=\frac{\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2-\mathrm{AB}^2}{2\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}}=\frac{(\sqrt{6})^2+3^2-(2\sqrt{3})^2}{2\cdot\sqrt{6}\cdot 3}=\frac{3}{6\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{{}^{ア}6}}{{}^{イウ}12}$$

$0°<\angle\mathrm{ACB}<180°$ より，$\sin\angle\mathrm{ACB}>0$ であるから

$$\sin\angle\mathrm{ACB}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{ACB}}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{12}\right)^2}=\sqrt{\frac{23}{24}}=\frac{\sqrt{{}^{エオカ}138}}{{}^{キク}12}$$

円Oの半径を R とすると，△ABCにおいて，正弦定理により

$$2R=\frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{ACB}}$$

よって　$R=\dfrac{\mathrm{AB}}{2\sin\angle\mathrm{ACB}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{138}}{12}}=\dfrac{{}^{ケ}6\sqrt{{}^{コサ}46}}{{}^{シス}23}$

(1)　XYとBCは平行であるから，錯角は等しい。

よって　　$\angle XAB=\angle ABC$　……①　（セ ①）

XP が円 O に接するから　　$\angle XBA=\angle ACB$　……②　（ソ ②）

①，② より，2 組の角がそれぞれ等しいから　　$\triangle XAB \backsim \triangle ABC$

よって　　$\angle AXB=\angle BAC$　（タ ⓪）

$\triangle XAB \backsim \triangle ABC$ から　　$AX:BA=AB:BC$

よって　　$AX=\dfrac{AB^2}{BC}=\dfrac{(2\sqrt{3})^2}{\sqrt{6}}={}^{チ}2\sqrt{{}^{ツ}6}$

(2)　(1) と同様に考えると　　$\triangle YCA \backsim \triangle ABC$

よって　　$AY:CA=CA:BC$

ゆえに　　$AY=\dfrac{CA^2}{BC}=\dfrac{3^2}{\sqrt{6}}=\dfrac{{}^{テ}3\sqrt{{}^{ト}6}}{{}^{ナ}2}$

$XY /\!/ BC$ から　　$PB:PX=PC:PY$　……③

$\triangle PXA$ に着目すると　　$PB:PX=BD:XA$　……④

$\triangle PYA$ に着目すると　　$PC:PY=DC:AY$　……⑤

③，④，⑤ から　　$BD:XA=DC:AY$

よって　　$\dfrac{DC}{BD}=\dfrac{AY}{XA}=\dfrac{\frac{3\sqrt{6}}{2}}{2\sqrt{6}}=\dfrac{{}^{ニ}3}{{}^{ヌ}4}$

ゆえに　　$DC=BC\cdot\dfrac{3}{4+3}=\dfrac{{}^{ネ}3\sqrt{{}^{ノ}6}}{{}^{ハ}7}$

$\triangle ACD$ において，余弦定理により

$$AD^2=AC^2+DC^2-2AC\cdot DC\cos\angle ACD$$
$$=3^2+\left(\frac{3\sqrt{6}}{7}\right)^2-2\cdot3\cdot\frac{3\sqrt{6}}{7}\cdot\frac{\sqrt{6}}{12}$$
$$=9+\frac{54}{49}-\frac{9}{7}=\frac{432}{49}$$

$AD>0$ であるから　　$AD=\sqrt{\dfrac{432}{49}}=\dfrac{{}^{ヒフ}12\sqrt{{}^{ヘ}3}}{{}^{ホ}7}$

3 解答　(1)　15　　(2)　816　　(3)　2047

解説

(1)　m 個の ○ を 1 列に並べて，○ と ○ の間の $(m-1)$ か所から $(n-1)$ 個を選んで仕切り | を入れ，左から順に仕切りで区切られた ○ の数をそれぞれ，自然数の列の数とすると，自然数の列が 1 つ決まる。

逆に，この ○ と | の列から自然数の列がすべて得られる。

例えば，7 個の ○ の間に，右の図のように 2 つの仕切り | を入れたとき，自然数の列は 1，4，2 となる。

○|○ ○ ○ ○|○ ○

よって　　$f(7,\ 3)={}_{7-1}C_{3-1}={}_6C_2=15$

(2)　(1) と同様に考えて　　$f(19,\ 4)={}_{19-1}C_{4-1}={}_{18}C_3=816$

(3)　(1) と同様に考えて　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{11} f(12,\ k)=\sum_{k=1}^{11} {}_{11}C_{k-1}={}_{11}C_0+{}_{11}C_1+\cdots\cdots+{}_{11}C_{10}$

ここで，二項定理により　$(1+x)^{11}={}_{11}\mathrm{C}_0+{}_{11}\mathrm{C}_1x+\cdots\cdots+{}_{11}\mathrm{C}_{10}x^{10}+{}_{11}\mathrm{C}_{11}x^{11}$

この等式で，$x=1$ とおくと　$(1+1)^{11}={}_{11}\mathrm{C}_0+{}_{11}\mathrm{C}_1+\cdots\cdots+{}_{11}\mathrm{C}_{10}+{}_{11}\mathrm{C}_{11}$

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{11}f(12,\ k)=2^{11}-{}_{11}\mathrm{C}_{11}=2048-1=2047$

4 解答　(アイ) $\frac{7}{6}$　(ウエ) $\frac{7}{6}$　(オカ) $\frac{1}{2}$　(キク) $\frac{1}{2}$　(ケコ) $\frac{5}{6}$

(サシ) $\frac{5}{6}$　(スセ) $\frac{1}{9}$　(ソタ) $\frac{7}{18}\pi$

解説

(1)　点 P，Q は直線 $y\cos\theta-x\sin\theta=0$ 上にある。

よって，点 R が直線 $y\cos\theta-x\sin\theta=0$ 上にあるとき，R は線分 PQ を 1：2 に内分する点，または外分する点である。

R が線分 PQ を 1：2 に内分するとき，R の座標は

$$\left(\frac{2\cos\theta+\frac{3}{2}\cos\theta}{1+2},\ \frac{2\sin\theta+\frac{3}{2}\sin\theta}{1+2}\right)\quad \text{すなわち}\quad \left(\frac{7}{6}\cos\theta,\ \frac{7}{6}\sin\theta\right)$$

R が線分 PQ を 1：2 に外分するとき，R の座標は

$$\left(\frac{-2\cos\theta+\frac{3}{2}\cos\theta}{1-2},\ \frac{-2\sin\theta+\frac{3}{2}\sin\theta}{1-2}\right)\quad \text{すなわち}\quad \left(\frac{1}{2}\cos\theta,\ \frac{1}{2}\sin\theta\right)$$

したがって，点 R の座標は　$\left(\frac{7}{6}\cos\theta,\ \frac{7}{6}\sin\theta\right)$ または $\left(\frac{1}{2}\cos\theta,\ \frac{1}{2}\sin\theta\right)$

(2)　R$(X,\ Y)$ とする。

PR：QR＝1：2 から　2PR＝QR　ゆえに　$4\mathrm{PR}^2=\mathrm{QR}^2$

$$\mathrm{PR}^2=(X-\cos\theta)^2+(Y-\sin\theta)^2,\quad \mathrm{QR}^2=\left(X-\frac{3}{2}\cos\theta\right)^2+\left(Y-\frac{3}{2}\sin\theta\right)^2$$

であるから　$4\{(X-\cos\theta)^2+(Y-\sin\theta)^2\}=\left(X-\frac{3}{2}\cos\theta\right)^2+\left(Y-\frac{3}{2}\sin\theta\right)^2$

展開して整理すると　$X^2+Y^2-\frac{5}{3}X\cos\theta-\frac{5}{3}Y\sin\theta+\frac{7}{12}=0$

よって　$\left(X-\frac{5}{6}\cos\theta\right)^2+\left(Y-\frac{5}{6}\sin\theta\right)^2=\frac{1}{9}$

ゆえに，R の軌跡の方程式は　$\left(x-\frac{5}{6}\cos\theta\right)^2+\left(y-\frac{5}{6}\sin\theta\right)^2=\frac{1}{9}$

(3)　円 $D(\theta)$ の中心の座標を $(X',\ Y')$ とすると，(2) から

$$X'=\frac{5}{6}\cos\theta,\ Y'=\frac{5}{6}\sin\theta\qquad \text{よって}\qquad \cos\theta=\frac{6}{5}X',\ \sin\theta=\frac{6}{5}Y'$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ にこれらを代入すると　$\left(\frac{6}{5}Y'\right)^2+\left(\frac{6}{5}X'\right)^2=1$

整理すると　$X'^2+Y'^2=\frac{25}{36}$

また，$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき　$0\leqq X'\leqq\frac{5}{6}$，$0\leqq Y'\leqq\frac{5}{6}$

したがって，θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を動くとき，$D(\theta)$ の中心の軌跡は円 $x^2+y^2=\dfrac{25}{36}$ の $0 \leqq x \leqq \dfrac{5}{6}$，$0 \leqq y \leqq \dfrac{5}{6}$ の部分である。

ゆえに，$D(\theta)$ が通過する部分を図示すると，右の図の斜線部分のようになる。

よって，求める面積は

$$\frac{1}{4}\pi\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^2-\frac{1}{4}\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}\pi\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{7}{18}\pi$$