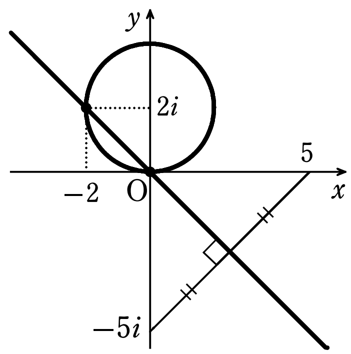
藤田医科大学対策問題７　※１はマーク加工なし

問題Ⅰ

⑴ 解答　0，-64



$$\begin{cases} |z-5|=|z+5i| & \cdots\cdots ① \\ |z-2i|=2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① を満たす点 z は，2 点 5，$-5i$ を結ぶ線分の垂直二等分線上を動く。

② を満たす点 z は，点 $2i$ を中心とする半径 2 の円周上を動く。

よって，右の図から，①，② をともに満たす z は

$$z=0,\ -2+2i$$

$z=0$ のとき　　$z^4=0$

$z=-2+2i$ のとき，$z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$ であるから

$$z^4=(2\sqrt{2})^4(\cos 3\pi+i\sin 3\pi)=-64$$

したがって　　$z^4=0,\ -64$

⑵ 解答　$\dfrac{3}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{2}\cdot\frac{e^{3x}-1}{3x}=\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}$$

⑶ 解答　最小値 $2-\sqrt{2}$，最大値 1

$0\leqq t\leqq x$ のとき　　$x-t\geqq 0$

$x\leqq t\leqq \frac{\pi}{2}$ のとき　　$x-t\leqq 0$

よって　　$f(x)=\int_0^x \sin(x-t)\,dt+\int_x^{\frac{\pi}{2}}\sin(t-x)\,dt$

$$=\Big[\cos(x-t)\Big]_0^x+\Big[-\cos(t-x)\Big]_x^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=1-\cos x-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+1$$

$$=2-\sin x-\cos x=2-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ であるから　　$\frac{\pi}{4}\leqq x+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{3}{4}\pi$

よって　　$\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

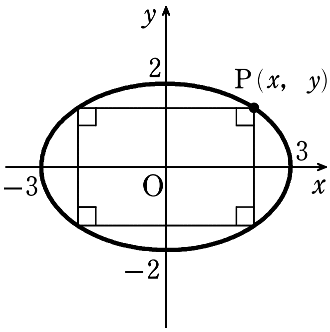
したがって，$f(x)$ の最小値は　$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$ すなわち $x=\frac{\pi}{4}$ のとき　$2-\sqrt{2}$

最大値は　$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ すなわち $x=0,\ \frac{\pi}{2}$ のとき　1

⑷ 解答　（ア）$\dfrac{12\sqrt{13}}{13}$　　（イ）12

楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ に内接する長方形の 4 辺は，

x 軸または y 軸と平行である。



正方形の 1 辺の長さを l とすると，第 1 象限にある

正方形の頂点の座標は　$\left(\dfrac{l}{2},\ \dfrac{l}{2}\right)$

これが楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上にあるから

$$\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{l}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{l}{2}\right)^2=1$$

すなわち　$l^2=\dfrac{12^2}{13}$

$l>0$ であるから　$l=\dfrac{12}{\sqrt{13}}={}^{ア}\dfrac{12\sqrt{13}}{13}$

また，長方形の第 1 象限にある頂点を P$(x,\ y)$ $(x>0,\ y>0)$ とすると

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \quad \cdots\cdots ①$$

このとき，長方形の面積を S とすると　$S=4xy$　……②

ここで，$\dfrac{x^2}{9}>0$，$\dfrac{y^2}{4}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\geqq 2\sqrt{\frac{x^2}{9}\cdot\frac{y^2}{4}}=\frac{1}{3}xy$$

これと ①，② より　$1\geqq\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{S}{4}$　　よって　$S\leqq 12$

等号は，$\dfrac{x^2}{9}=\dfrac{y^2}{4}=\dfrac{1}{2}$ $(x>0,\ y>0)$ すなわち $x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$y=\sqrt{2}$ のとき成立する。

したがって，面積 S の最大値は　${}^{イ}12$

別解　楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ に内接する長方形の 4 辺は，x 軸または y 軸と平行であるから，

長方形の第 1 象限にある頂点の座標は，媒介変数 θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いて

$(3\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ と表される。

この長方形が正方形であるとき　$3\cos\theta=2\sin\theta$

すなわち　$\tan\theta=\dfrac{3}{2}$

$\cos\theta>0$ であるから　$\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$

ゆえに，正方形の 1 辺の長さは　$2\cdot 3\cos\theta=6\cdot\dfrac{2}{\sqrt{13}}={}^{ア}\dfrac{12\sqrt{13}}{13}$

また，長方形の面積を S とすると　$S=6\cos\theta\cdot 4\sin\theta=12\sin 2\theta$

$0<2\theta<\pi$ であるから，S は $2\theta=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大値 ${}^{イ}12$ をとる。

参考 $\left(\right.$楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ に内接する長方形の 4 辺が，x 軸または y 軸と平行であることの証明)

x 軸，y 軸と平行でない辺をもつ長方形で，楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ に内接するものが存在すると仮定する。

これを y 軸方向に $\dfrac{3}{2}$ 倍に拡大すると，円 $x^2+y^2=9$ に内接するような，長方形ではない平行四辺形が得られる。

これは，円に内接する平行四辺形がすべて長方形であることと矛盾する。

したがって，楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ に内接する長方形の 4 辺は，x 軸または y 軸と平行である。

(5) 解答　(ア)　692　　(イ)　9　　(ウ)　2.2

点数の平均値が 8，分散が 5.2 であるから

$$\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}{x_i}^2-8^2=5.2 \qquad \text{よって} \qquad \sum_{i=1}^{10}{x_i}^2={}^{ア}692$$

修正後の 10 人の点数の平均値は　$\dfrac{1}{10}(8\cdot10+5+5)={}^{イ}9$

修正後の 10 人の点数を y_1，y_2，……，y_{10} とすると

$$\sum_{i=1}^{10}{y_i}^2=\sum_{i=1}^{10}{x_i}^2+(10^2-5^2)+(9^2-4^2)=832$$

ゆえに，修正後の 10 人の点数の分散は

$$\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}{y_i}^2-9^2=83.2-81={}^{ウ}2.2$$

(6) 解答　$(a,\ b)=(24,\ 432),\ (48,\ 216)$

a，b の最大公約数が 24 であるから，$a=24a'$，$b=24b'$ と表される。

ただし，a'，b' は互いに素な自然数で　$a'\leqq b'$　…… ①

このとき，a，b の最小公倍数は $24a'b'$ であるから

$$24a'b'=432 \qquad \text{すなわち} \qquad a'b'=18 \quad \cdots\cdots ②$$

①，② を満たす互いに素な自然数 a'，b' の組は　$(a',\ b')=(1,\ 18),\ (2,\ 9)$

よって　$(a,\ b)=(24,\ 432),\ (48,\ 216)$

(7) 解答　$2^n(2n-3)+3$

$$S=1\cdot1+2\cdot3+2^2\cdot5+\cdots\cdots+2^{n-1}(2n-1)$$

両辺に 2 を掛けると

$$2S=\qquad 2\cdot1+2^2\cdot3+\cdots\cdots+2^{n-1}(2n-3)+2^n(2n-1)$$

辺々を引くと

$$\begin{aligned}-S&=1+2\cdot2+2^2\cdot2+\cdots\cdots+2^{n-1}\cdot2-2^n(2n-1)\\&=1+2(2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1})-2^n(2n-1)\\&=1+2\cdot\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}-2^n(2n-1)=1+2^{n+1}-4-2^n(2n-1)\\&=2^n(3-2n)-3\end{aligned}$$

よって　　$S=2^n(2n-3)+3$

(8) 解答　6

$25!=a\times10^M$ (Mは0以上の整数，aは10で割り切れない自然数)のとき，

$10^M=2^M\cdot5^M$，$2<5$であるから，25! を素因数分解したとき，素因数5の個数はM個である。

1から25までの自然数のうち，5の倍数は5個，5^2の倍数は1個である。

よって，25! を素因数分解したとき，素因数5の個数は　　$5+1=6$ (個)

したがって　　$M=6$

(9) 解答　(ア)　83　　(イ)　4

$$\log_{10}45^{50}=50\log_{10}45=50\log_{10}(5\cdot3^2)$$

$$=50(\log_{10}5+2\log_{10}3)=50\left(\log_{10}\frac{10}{2}+2\log_{10}3\right)$$

$$=50\{(1-\log_{10}2)+2\log_{10}3\}=50(0.6990+0.9542)=82.66$$

ゆえに　　$82<\log_{10}45^{50}<83$

よって，45^{50}は ${}^{ア}83$ 桁の数である。

また　　$\log_{10}45^{50}=82+0.66$

ここで，$\log_{10}4=2\log_{10}2=0.6020$，$\log_{10}5=1-\log_{10}2=0.6990$であるから

$$\log_{10}4<0.66<\log_{10}5 \qquad すなわち \qquad 4<10^{0.66}<5$$

ゆえに，$4\cdot10^{82}<10^{82.66}<5\cdot10^{82}$であるから　　$4\cdot10^{82}<45^{50}<5\cdot10^{82}$

したがって，45^{50}の最高位の数字は ${}^{イ}4$ である。

(10) 解答　(ア)　5　　(イ)　1　　(ウ)　4

$\angle\mathrm{PAB}=\theta$とすると　　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

$$\mathrm{AP}+2\mathrm{BP}=\cos\theta+2\sin\theta=\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし　　$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$となる$\theta$のとき，AP+2BPは最大値$\sqrt{{}^{ア}5}$をとる。

また，△ABPの面積が最大となるのは$\theta=\dfrac{\pi}{4}$のときで，その最大値は

$$\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{{}^{イ}1}{{}^{ウ}4}$$

問題Ⅱ

解答　(1)　接線の方程式 $y=\sqrt{3}x$，接点の座標 $(1,\ \sqrt{3})$　　(2)　$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(3)　$S=\dfrac{7\sqrt{3}}{6}-\dfrac{4}{9}\pi$

(1)　$y'=\dfrac{6}{2\sqrt{6x-3}}=\dfrac{3}{\sqrt{6x-3}}$であるから，接点の座標を$(t,\ \sqrt{6t-3})$とおくと，接

線の方程式は　$y-\sqrt{6t-3}=\dfrac{3}{\sqrt{6t-3}}(x-t)$

これが原点を通るとき　$-\sqrt{6t-3}=-\dfrac{3t}{\sqrt{6t-3}}$

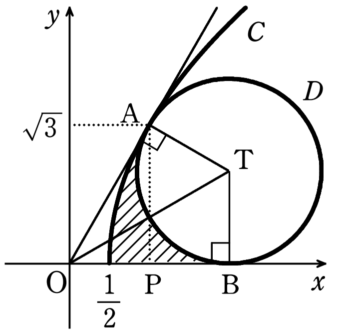
両辺に $-\sqrt{6t-3}$ を掛けると　$6t-3=3t$　よって　$t=1$

ゆえに，求める接線の方程式は　$y=\sqrt{3}\,x$

$x=1$ のとき $y=\sqrt{3}$ であるから，接点の座標は　$(1,\ \sqrt{3})$

(2) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{6x-3}\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(6x-3)^{\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot(6x-3)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{1}{9}\cdot 3^{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(3) 円 D の中心を T，x 軸との接点を B，点 $(1,\ 0)$ を P とする。



△AOT と △BOT は合同な直角三角形であり，

$\tan\angle\mathrm{AOB}=\sqrt{3}$ より $\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$\angle\mathrm{ATB}=2\pi-\frac{\pi}{3}-2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{2}{3}\pi$$

$\mathrm{OA}=2$ であるから　$\mathrm{OB}=2,\ \mathrm{AT}=\mathrm{BT}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

よって　$\displaystyle S=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{6x-3}\,dx+(\text{台形 APBT})-(\text{扇形 TAB})$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\cdot1\cdot\left(\sqrt{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\frac{2}{3}\pi$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{5\sqrt{3}}{6}-\frac{4}{9}\pi=\frac{7\sqrt{3}}{6}-\frac{4}{9}\pi$$

問題Ⅲ

$\boxed{\text{解答}}$ (1) $a_3=90,\ b_3=34$　(2) 略　(3) 1　(4) 略

(1) $(3+\sqrt{7})^3=27+27\sqrt{7}+63+7\sqrt{7}=90+34\sqrt{7}$

よって　$a_3=90,\ b_3=34$

(2) $(3-\sqrt{7})^n=a_n-b_n\sqrt{7}$　…… ① とする。

[1] $n=1$ のとき

$(3+\sqrt{7})^1=3+\sqrt{7}$ より　$a_1=3,\ b_1=1$

$(3-\sqrt{7})^1=3-\sqrt{7}$ より　$3-\sqrt{7}=a_1-b_1\sqrt{7}$

よって，$n=1$ のとき，① は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$(3-\sqrt{7})^k=a_k-b_k\sqrt{7}$　…… ②　と仮定する。

$n=k+1$ のとき，② から

$$(3-\sqrt{7})^{k+1}=(3-\sqrt{7})(3-\sqrt{7})^k=(3-\sqrt{7})(a_k-b_k\sqrt{7})$$

$$=(3a_k+7b_k)-(a_k+3b_k)\sqrt{7}$$

ここで，$(3+\sqrt{7})^k=a_k+b_k\sqrt{7}$ であるから

$(3+\sqrt{7})^{k+1}=(3+\sqrt{7})(3+\sqrt{7})^k=(3+\sqrt{7})(a_k+b_k\sqrt{7})$

$=(3a_k+7b_k)+(a_k+3b_k)\sqrt{7}$

よって　$a_{k+1}=3a_k+7b_k$ ……③，$b_{k+1}=a_k+3b_k$ ……④

ゆえに　$(3-\sqrt{7})^{k+1}=a_{k+1}-b_{k+1}\sqrt{7}$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，$(3-\sqrt{7})^n=a_n-b_n\sqrt{7}$ が成り立つ。

(3)　(2) より　$(3+\sqrt{7})^n(3-\sqrt{7})^n=(a_n+b_n\sqrt{7})(a_n-b_n\sqrt{7})$

よって　$2^n=a_n{}^2-7b_n{}^2$　　ゆえに　$a_n{}^2=7b_n{}^2+2^n$ ……⑤

b_n は整数であるから，$7b_n{}^2$ は 7 の倍数である。

よって，$a_n{}^2$ を 7 で割った余りは，2^n を 7 で割った余りに等しい。

n が 3 の倍数のとき，n は k を整数として $n=3k$ と表される。

このとき　$2^n=2^{3k}=8^k$

8 を 7 で割った余りは 1 であるから，8^k を 7 で割った余りは，1^k を 7 で割った余りに等しい。

$1^k=1$ より，$8^k=2^n$ を 7 で割った余りは　1

したがって，n が 3 の倍数のとき，$a_n{}^2$ を 7 で割った余りは　1

(4)　$a_1=3$，$b_1=1$，③，④ より　$a_n>0$，$b_n>0$

⑤，$a_n>0$ から　$a_n=\sqrt{7b_n{}^2+2^n}$

よって　$(3+\sqrt{7})^n=\sqrt{7b_n{}^2+2^n}+b_n\sqrt{7}$

$b_n>0$ より　$(3+\sqrt{7})^n=\sqrt{7b_n{}^2+2^n}+\sqrt{7b_n{}^2}$

したがって，$c_n=7b_n{}^2$ とすると，正の整数 c_n は $(3+\sqrt{7})^n=\sqrt{c_n+2^n}+\sqrt{c_n}$ を満たす。

よって，$(3+\sqrt{7})^n=\sqrt{c_n+2^n}+\sqrt{c_n}$ を満たす正の整数 c_n が存在する。