藤田医科大学対策問題７　※１はマーク加工なし

問題Ⅰ

(1) 複素数 z が 2 つの方程式 $|z-5|=|z+5i|$ と $|z-2i|=2$ をともに満たすとき，

$z^4=\boxed{}$ である。ただし，i は虚数単位とする。

(2) 極限値 $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{2x}=\boxed{}$ 。ただし，e は自然対数の底である。

(3) 関数 $f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin|x-t|\,dt$ の $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における最小値は $\boxed{}$ であり、最大値は

$\boxed{}$ である。

(4) 楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ に内接する正方形の 1 辺の長さは $\boxed{}$ である。また，この楕円

に内接する長方形の面積の最大値は $\boxed{}$ である。

(5) 10 人の生徒に対して数学の小テストを実施した。採点を行ったところ，点数の平均値は 8，分散は 5.2 であった。このとき，この 10 人の点数を x_1，x_2，……，x_{10} とすると $\sum_{i=1}^{10}(x_i)^2=\boxed{}$ である。その後，この 10 人の点数のうち 2 人の点数が次のように修正された。

生徒	修正前	修正後
A	5	10
B	4	9

2 人の点数を修正した結果，この 10 人の点数の平均値は $\boxed{}$，分散は $\boxed{}$ となる。

(6) 最大公約数が 24 で，最小公倍数が 432 であるような 2 つの自然数 a，b の組 $(a,\ b)$ は

すべて求めると $\boxed{}$ 組である 。ただし，$a\leqq b$ とする。

(7) 和 $S=\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}(2k-1)$ を n の式で表すと $\boxed{}$ である。

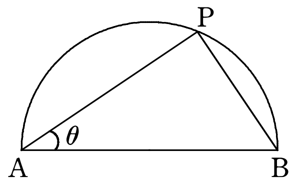
(8) $25!=a\times 10^M$ (M は 0 以上の整数，a は 10 で割り切れない自然数) と表せば，

$M=\boxed{}$ である。

(9) 45^{50} は $\boxed{}$ 桁の数で，最高位の数字は $\boxed{}$ である。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}7=0.8451$ とする。

(10) 点 P が長さ 1 の線分 AB を直径とする半円周上を動くとき，$\mathrm{AP}+2\mathrm{BP}$ の最大値は $\boxed{}$ である。また，

$\triangle\mathrm{ABP}$ の面積の最大値は $\boxed{}$ である。



問題Ⅱ

xy 平面上で，$y=\sqrt{6x-3}$ で表される曲線を C とする。

(1)　曲線 C の接線のうち，原点を通る接線の方程式を求めよ。また，この接線と曲線 C との接点 A の座標を求めよ。

(2)　$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{6x-3}\,dx$ の値を求めよ。

(3)　(1) のとき，x 軸に接し，曲線 C と点 A で同じ接線をもつ円を D とする。この円 D と曲線 C との共有点は点 A のみであり，点 A 以外の円 D 上の点は接線の下側にある。このとき，円 D の外部，および周において，曲線 C，x 軸，および円 D とで囲まれた部分の面積 S を求めよ。

問題Ⅲ

n を自然数とし，a_n，b_n を等式 $(3+\sqrt{7})^n = a_n + b_n\sqrt{7}$ を満たす整数と定める。

(1)　a_3 と b_3 を求めよ。

(2)　$(3-\sqrt{7})^n = a_n - b_n\sqrt{7}$ が成り立つことを示せ。

(3)　n が 3 の倍数のとき，${a_n}^2$ を 7 で割った余りを求めよ。

(4)　$(3+\sqrt{7})^n = \sqrt{c_n + 2^n} + \sqrt{c_n}$ を満たす正の整数 c_n が存在することを示せ。