藤田医科大学　対策問題1 ～本田数学専門ゼミ～
※問題Ⅰマーク加工はしてません

問題Ⅰ(1) 解答　（ア）　162.5　　（イ）　-55

数学テストの得点の平均値は　$\dfrac{1}{4}(85+90+60+65)=75$ (点)

よって，数学のテストの得点の分散は

$$\frac{1}{4}\{(85-75)^2+(90-75)^2+(60-75)^2+(65-75)^2\}={}^{ア}162.5$$

次に，英語のテストの得点の中央値が $100-\dfrac{x}{3}$ であることから

[1]　$0 \leqq x < 70$ のとき

$$100-\frac{x}{3}=\frac{1}{2}(70+80)$$

よって　　$x=75$

これは $x<70$ を満たさないから，不適である。

[2]　$70 \leqq x < 90$ のとき

$$100-\frac{x}{3}=\frac{1}{2}(x+80)$$

よって　　$x=72$

これは $70 \leqq x < 90$ を満たすから，適する。

[3]　$90 \leqq x \leqq 100$ のとき

$$100-\frac{x}{3}=\frac{1}{2}(80+90)$$

よって　　$x=45$

これは $90 \leqq x \leqq 100$ を満たさないから，不適である。

以上から　　$x=72$

このとき，英語の得点の平均値は　$\dfrac{1}{4}(80+70+90+72)=78$ (点)

以上から，数学と英語の得点の共分散は

$$\frac{1}{4}\{(85-75)(80-78)+(90-75)(70-78)+(60-75)(90-78)+(65-75)(72-78)\}=-55$$

(2) 解答　（ア）　$-\dfrac{5}{4}$　　（イ）　-1

$\cos^2 x+\sin x+a=0$ から　　$\sin^2 x-\sin x-1=a$

$t=\sin x$ とおくと　　$t^2-t-1=a$　……①

また，$0 \leqq x \leqq \pi$ であるから　　$0 \leqq t \leqq 1$

$t^2-t-1=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$ であるから，$0 \leqq t \leqq 1$ のとき　　$-\dfrac{5}{4} \leqq t^2-t-1 \leqq -1$

t の方程式 ① の実数解は，$y=t^2-t-1$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の t 座標である。

よって，求める a の値の範囲は　　${}^{ア}-\dfrac{5}{4} \leqq a \leqq {}^{イ}-1$

(3) 解答　$\tan x=2$

$f'(x)=5\sin^4 x\cos x-40\sin x\cos^4 x=5\sin x\cos x(\sin^3 x-8\cos^3 x)$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において $f'(x)=0$ とすると　　$\sin x=0$，$\cos x=0$，$\sin^3 x=8\cos^3 x$

$\sin x=0$ から　　$x=0$　　　　$\cos x=0$ から　　$x=\dfrac{\pi}{2}$

$\sin^3 x=8\cos^3 x$ において，$\cos x=0$ のとき等式は成り立たないから　　$\cos x \neq 0$

よって，両辺を $\cos^3 x$ で割ると　　$\tan^3 x=8$

$\tan x$ は実数であるから　　$\tan x=2$

これを満たす x は $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲にただ 1 つ存在するから，その値を θ とおくと，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	θ	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，$f(x)$ は $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において $x=\theta$ で最小値 α をとるから，$f(x)=\alpha$ となる x について　　$\tan x=2$

(4) 解答　$x+1$

方程式 $x^2+x+1=0$ の解の 1 つを ω とすると　　$\omega^2+\omega+1=0$

よって　　$\omega^2=-\omega-1$

ゆえに　　$\omega^3=\omega(-\omega-1)=-\omega^2-\omega$

$\qquad =-(-\omega-1)-\omega=1$

整式 $x^{2019}+x^{2020}$ を整式 x^2+x+1 で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ (a，b は実数) とすると　　$x^{2019}+x^{2020}=(x^2+x+1)Q(x)+ax+b$

$\omega^3=1$ から　　$\omega^{2019}+\omega^{2020}=(\omega^3)^{673}+(\omega^3)^{673}\omega=\omega+1$

また　　$(\omega^2+\omega+1)Q(\omega)+a\omega+b=a\omega+b$

よって　　$\omega+1=a\omega+b$

a，b は実数，ω は虚数であるから　　$a=1$，$b=1$

したがって，求める余りは　　$x+1$

(5) $\boxed{解答}$　$4\sqrt{14}$

$7\cdot2^x>0$，$2^{3-x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係 により

$$7\cdot2^x+2^{3-x}\geqq2\sqrt{7\cdot2^x\cdot2^{3-x}}=2\sqrt{7\cdot2^3}=4\sqrt{14}$$

等号が成り立つのは $7\cdot2^x=2^{3-x}$ のときである。

両辺に 2^x を掛けて　　$7\cdot2^{2x}=2^3$　　　　すなわち　　$2^{2x}=\dfrac{8}{7}$

よって　　$2x=\log_2\dfrac{8}{7}$　　　　ゆえに　　$x=\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{8}{7}$

よって，$7\cdot2^x+2^{3-x}$ は $x=\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{8}{7}$ で最小値 $4\sqrt{14}$ をとる。

(6) $\boxed{解答}$　$-\sqrt{6}-\sqrt{2}\,i$

方程式の解 z の極形式を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ …… ① とすると

$$z^2=r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)$$

$4(1+\sqrt{3}\,i)$ を極形式で表すと　　$4(1+\sqrt{3}\,i)=8\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

よって　　$r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)=8\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

両辺の絶対値と偏角を比較すると　　$r^2=8$，$2\theta=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$　（k は整数）

$r>0$ であるから　　$r=2\sqrt{2}$　…… ②　　　　また　　$\theta=\dfrac{\pi}{6}+k\pi$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で考えると，$k=0$，1 であるから　　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{7}{6}\pi$　…… ③

②，③ を ① に代入すると　　$z=\sqrt{6}+\sqrt{2}\,i$，$-\sqrt{6}-\sqrt{2}\,i$

ゆえに，方程式の解で実部が負であるものは　　$z=-\sqrt{6}-\sqrt{2}\,i$

(7) $\boxed{解答}$　2

$f'(x)=ae^{ax}\cdot\sin bx+e^{ax}\cdot b\cos bx=e^{ax}(a\sin bx+b\cos bx)$

$$\begin{aligned}f''(x)&=ae^{ax}\cdot(a\sin bx+b\cos bx)+e^{ax}\cdot(ab\cos bx-b^2\sin bx)\\&=e^{ax}\{(a^2-b^2)\sin bx+2ab\cos bx\}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}f''(x)-2f'(x)+2f(x)&=e^{ax}\{(a^2-b^2)\sin bx+2ab\cos bx\}\\&\quad-2e^{ax}(a\sin bx+b\cos bx)+2e^{ax}\sin bx\\&=e^{ax}\{(a^2-b^2-2a+2)\sin bx+2b(a-1)\cos bx\}\end{aligned}$$

したがって，$f''(x)-2f'(x)+2f(x)=0$ より

$$e^{ax}\{(a^2-b^2-2a+2)\sin bx+2b(a-1)\cos bx\}=0$$

これが x についての恒等式となるとき，$e^{ax}>0$ から

$$a^2-b^2-2a+2=0 \quad \cdots\cdots ①, \quad 2b(a-1)=0 \quad \cdots\cdots ②$$

② と $b \neq 0$ から　　$a=1$　　　　① に代入して　　$b^2=1^2-2\cdot 1+2=1$

したがって　　$a^2+b^2=1^2+1=2$

(8) 解答　$a=4$，極限値は 1

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x+3}-8}{x-1}$ が有限な値 α になるとすると

$$\lim_{x\to 1}(a\sqrt{x+3}-8)=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{a\sqrt{x+3}-8}{x-1}\times(x-1)\right\}=\alpha\times 0=0$$

ゆえに　　$2a-8=0$　　　　よって　　$a=4$

このとき　　$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{4\sqrt{x+3}-8}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{4(\sqrt{x+3}-2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{4\{(\sqrt{x+3})^2-2^2\}}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{4(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{4}{\sqrt{x+3}+2}$$

$$=1$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{4\sqrt{x+3}-8}{x-1}$ は有限な値になる。

したがって　　$a=4$　　　　そのときの極限値は　　1

(9) 解答　（ア）　729　　（イ）　1822　　（ウ）　243

次のように群に区切って考える。

$$1 \;\Big|\; \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3} \;\Big|\; \frac{1}{9},\ \frac{1}{9},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{9} \;\Big|\; \frac{1}{27},\ \cdots\cdots$$

このとき，第 k 群には 3^{k-1} 個の数 $\dfrac{1}{3^{k-1}}$ がある。

第 1 群から第 k 群の末頃までの項数は

$$1+3+\ \cdots\cdots\ +3^{k-1}=\frac{3^k-1}{3-1}=\frac{3^k-1}{2}$$

$\dfrac{3^6-1}{2}(=364)<670<\dfrac{3^7-1}{2}(=1093)$ であるから，第 670 項は第 7 群に含まれ，その値は　$\dfrac{1}{3^6}=\dfrac{1}{{}^{ア}729}$

同様に，$\dfrac{3^7-1}{2}<2182<\dfrac{3^8-1}{2}(=3280)$ であるから，第 2182 項は第 8 群に含まれ，

$2182-1093=1089$ より，第 8 群の 1089 番目である。

よって，初項から第 2182 項までの和は　　$1\times 7+\dfrac{1}{3^7}\times 1089=\dfrac{{}^{イ}1822}{{}^{ウ}243}$

(10) $\boxed{\text{解答}}$　$-\dfrac{1}{2}a^2$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=a\times a\times\cos 60^\circ=\dfrac{a^2}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}&=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)\\&=-\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=-\frac{1}{2}a^2\end{aligned}$$

問題Ⅱ$\boxed{\text{解答}}$　(1)　$a_2=\dfrac{1}{2}$，$b_2=\dfrac{4}{3}$，$a_3=\dfrac{11}{12}$，$b_3=\dfrac{29}{18}$　(2)　$a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$

(3)　$b_{n+1}=\dfrac{-a_n+4b_n}{3}$　(4)　$b_n-a_n=\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}$　(5)　$a_n=3\left\{1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}\right\}$

(1)　$a_1=0$，$b_1=1$ であるから　$a_2=\dfrac{a_1+b_1}{2}=\dfrac{1}{2}$，$b_2=\dfrac{-a_1+4b_1}{4-1}=\dfrac{4}{3}$

また　$a_3=\dfrac{a_2+b_2}{2}=\dfrac{11}{12}$，$b_3=\dfrac{-a_2+4b_2}{4-1}=\dfrac{29}{18}$

(2)　$a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$

(3)　$b_{n+1}=\dfrac{-a_n+4b_n}{4-1}=\dfrac{-a_n+4b_n}{3}$

(4)　(2)，(3) より　$b_{n+1}-a_{n+1}=\dfrac{-a_n+4b_n}{3}-\dfrac{a_n+b_n}{2}=\dfrac{5}{6}(b_n-a_n)$

ここで　$b_1-a_1=1-0=1$

ゆえに，数列 $\{b_n-a_n\}$ は初項 1，公比 $\dfrac{5}{6}$ の等比数列である。

したがって　$b_n-a_n=\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}$

(5)　(4) より，$b_n=a_n+\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}$ であるから

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}\left\{a_n+\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right\}=a_n+\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}{1-\frac{5}{6}} = 3\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right\}$$

この式で $n=1$ とおくと $a_1=0$ となり，$n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　　$a_n = 3\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right\}$

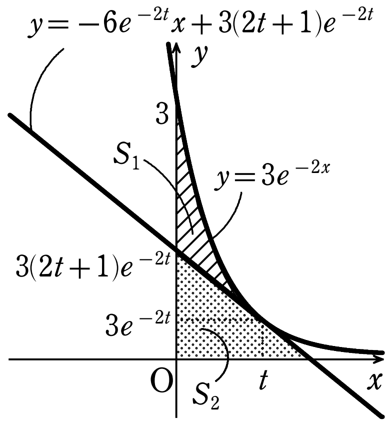
問題Ⅲ 解答　(1)　$y=-6e^{-2t}x+3(2t+1)e^{-2t}$　　(2)　$S_1=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}(2t^2+2t+1)e^{-2t}$

(3)　$t=\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{3}{e}$　　(4)　$\frac{3}{2}$

(1)　$y'=-6e^{-2x}$ であるから，曲線 $y=3e^{-2x}$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ 3e^{-2t})$ における接線の方程式は　　$y-3e^{-2t}=-6e^{-2t}(x-t)$

すなわち　　$y=-6e^{-2t}x+3(2t+1)e^{-2t}$　……①

(2)　求める面積 S_1 は右の図の斜線部分の面積であるから



$$S_1=\int_0^t 3e^{-2x}dx-\frac{1}{2}\{3(2t+1)e^{-2t}+3e^{-2t}\}\cdot t$$

$$=\left[-\frac{3}{2}e^{-2x}\right]_0^t-3(t^2+t)e^{-2t}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}(2t^2+2t+1)e^{-2t}$$

(3)　① において，$y=0$ とすると

$$0=-6e^{-2t}x+3(2t+1)e^{-2t}$$

よって　　$x=t+\frac{1}{2}$

したがって　　$S_2=\frac{1}{2}\cdot\left(t+\frac{1}{2}\right)\cdot 3(2t+1)e^{-2t}=\frac{3}{4}(2t+1)^2e^{-2t}$

ゆえに　　$\frac{dS_2}{dt}=3(2t+1)e^{-2t}-\frac{3}{2}(2t+1)^2e^{-2t}=\frac{3}{2}(2t+1)(-2t+1)e^{-2t}$

$t>0$ の範囲で，$\frac{dS_2}{dt}=0$ となるのは　　$t=\frac{1}{2}$

よって，S_2 の増減表は右のようになる。

t	0	…	$\frac{1}{2}$	…
$\frac{dS_2}{dt}$	／	$+$	0	$-$
S_2	／	↗	$\frac{3}{e}$	↘

したがって，S_2 は $t=\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{3}{e}$ をとる。

(4)　(2)，(3) より

$$\lim_{t\to\infty}(S_1+S_2)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}(2t^2+2t+1)e^{-2t}+3\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 e^{-2t}\right\}=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}e^{-2t}\right)=\frac{3}{2}$$