藤田医科大学対策　　※第1問のマークの加工はしてません

1

(1) 連立方程式 $\begin{cases} x(x-2y-1)=0 \\ y(2x-y-1)=0 \end{cases}$ の解 $(x,\ y)$ の個数は $\boxed{}$ 個である。

解答　4

(2) 3 次方程式 $x^3-5x^2+x+7=0$ の 3 つの解を α，β，γ とするとき，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ $=\boxed{}$ である。

解答　23

(3) SHOJI の 5 文字を全て使用して作成した文字列をアルファベット順の辞書式に並べるとき，JISHO となるのは $\boxed{}$ 番目である。

解答　59

(4) $a>0$，$b>0$ のとき，$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)$ の最小値は $\boxed{}$ である。

解答　9

(5) $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で方程式 $\cos 3x=\sin 2x$ を満たす x の値は ${}^{ア}\boxed{}$ である。また，この x に対して，$\sin x$ の値は ${}^{イ}\boxed{}$ である。

解答　(ア)　$\dfrac{\pi}{10}$　　(イ)　$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

(6) $2^{\frac{1}{2}}$，$3^{\frac{1}{3}}$，$5^{\frac{1}{5}}$ の大小関係は ${}^{ア}\boxed{}<{}^{イ}\boxed{}<{}^{ウ}\boxed{}$ である。

解答　(ア)　$5^{\frac{1}{5}}$　　(イ)　$2^{\frac{1}{2}}$　　(ウ)　$3^{\frac{1}{3}}$

(7) 関数 $y=2\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフは $y=2\sin 3x$ のグラフを x 軸方向に ${}^{ア}\boxed{}$ だけ平行移動したものであり，その正で最小の周期は ${}^{イ}\boxed{}$ である。

解答　(ア)　$-\dfrac{\pi}{6}$　　(イ)　$\dfrac{2\pi}{3}$

(8) 不等式 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}\geqq 1 \\ -3\leqq x\leqq 3 \end{cases}$ の表す領域を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積は

$\boxed{}\pi$ である。

解答　$\dfrac{21}{2}$

(9) 複素数平面上の点 z が $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|=\sqrt{5}$ を満たすとき，点 z は中心 ア$\boxed{}$，半径 イ$\boxed{}$ の円周上にある．

解答　(ア)　$-\dfrac{3}{2}$　　(イ)　$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(10) $-4\leqq x\leqq 0$ のとき，$y=\sqrt{a-4x}+b$ の最大値が 5，最小値が 3 であるとき，
$a=$ ア$\boxed{}$，$b=$ イ$\boxed{}$ となる．ただし，$a>0$ とする．

解答　(ア)　9　　(イ)　0

解説

(1) $\begin{cases} x(x-2y-1)=0 & \cdots\cdots ① \\ y(2x-y-1)=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ とおく。

① から　　$x=0$　　または　　$x=2y+1$

[1]　$x=0$ のとき

② から　　$y(-y-1)=0$　　　　よって　　$y=0,\ -1$

[2]　$x=2y+1$ のとき

② から　　$y\{2(2y+1)-y-1\}=0$

すなわち　　$y(3y+1)=0$　　　　よって　　$y=0,\ -\dfrac{1}{3}$

ゆえに，$y=0$ のとき $x=1$，$y=-\dfrac{1}{3}$ のとき $x=\dfrac{1}{3}$

[1]，[2] から　　$(x,\ y)=(0,\ 0),\ (0,\ -1),\ (1,\ 0),\ \left(\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$

したがって，解 $(x,\ y)$ の個数は　　4 個

(2) 3 次方程式の解と係数の関係から　　$\alpha+\beta+\gamma=5,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$

よって　　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=5^2-2\cdot 1=23$

(3) 辞書式に並べたときの 1 番目の文字列は　HIJOS

H△△△△ の形の文字列は　${}_4P_4=4!=24$ (個)

I△△△△ の形の文字列は　${}_4P_4=4!=24$ (個)

JH△△△ の形の文字列は　${}_3P_3=3!=6$ (個)

JIH△△ の形の文字列は　${}_2P_2=2!=2$ (個)

JIO△△ の形の文字列は　${}_2P_2=2!=2$ (個)

その次の文字列が JISHO である。

よって，JISHO となるのは　$24+24+6+2+2+1=59$ (番目)

(4) $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)=ab+\dfrac{4}{ab}+5$

$a>0$，$b>0$ であるから　$ab>0$

よって，相加平均・相乗平均の関係により

$$ab+\frac{4}{ab}+5 \geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}+5=9$$

等号は $ab=\dfrac{4}{ab}$ すなわち $ab=2$ のとき成り立つ。

したがって，求める最小値は　9

(5) $\cos 3x=\sin 2x$，$0<x<\dfrac{\pi}{4}$ のとき

$0<2x<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\sin 2x>0$

ゆえに　$\cos 3x>0$

また，$0<3x<\dfrac{3}{4}\pi$ であるから　$0<3x<\dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$0<x<\dfrac{\pi}{6}$

$\cos 3x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-3x\right)$ であり，$\sin\theta$ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において単調に増加するから，

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-3x\right)=\sin 2x$ のとき，$\dfrac{\pi}{2}-3x=2x$ である。

よって　$x={}^{ア}\dfrac{\pi}{10}$　これは $0<x<\dfrac{\pi}{6}$ を満たす。

また，3 倍角の公式，2 倍角の公式から

$$4\cos^3 x-3\cos x=2\sin x\cos x$$

$\cos x>0$ であるから　$4\cos^2 x-3=2\sin x$

よって，$4(1-\sin^2 x)-3=2\sin x$ から

$$4\sin^2 x+2\sin x-1=0$$

これを $\sin x$ について解くと　$\sin x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

$\sin\dfrac{\pi}{10}>0$ であるから，求める $\sin x$ の値は　${}^{イ}\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

(6) $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6=2^3=8$，$\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6=3^2=9$ より　$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6<\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6$

$2^{\frac{1}{2}}>0$，$3^{\frac{1}{3}}>0$ であるから　$2^{\frac{1}{2}}<3^{\frac{1}{3}}$

$\left(5^{\frac{1}{5}}\right)^{10}=5^2=25$，$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10}=2^5=32$ より　$\left(5^{\frac{1}{5}}\right)^{10}<\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10}$

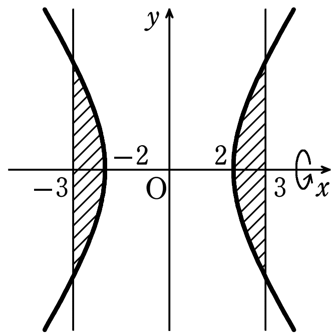
$5^{\frac{1}{5}}>0$，$2^{\frac{1}{2}}>0$ であるから　$5^{\frac{1}{5}}<2^{\frac{1}{2}}$

したがって　${}^{ア}5^{\frac{1}{5}}<{}^{イ}2^{\frac{1}{2}}<{}^{ウ}3^{\frac{1}{3}}$

(7) $y=2\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)$　…… ① を変形すると　$y=2\sin 3\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

よって，① のグラフは，$y=2\sin 3x$ のグラフを x 軸方向に $^{ア}-\dfrac{\pi}{6}$ だけ平行移動したものであり，その正で最小の周期は $^{イ}\dfrac{2\pi}{3}$ である。

(8) 不等式の表す領域は右の図の斜線部分である。



領域は x 軸，y 軸に関して対称であるから，求める体積を V とすると　　$V=2\pi\int_2^3 y^2dx$

$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ から　　$y^2=\dfrac{9}{4}x^2-9$

よって　　$V=2\pi\int_2^3\left(\dfrac{9}{4}x^2-9\right)dx=2\pi\left[\dfrac{3}{4}x^3-9x\right]_2^3$

$=\dfrac{21}{2}\pi$

(9) $|z-1|=\sqrt{5}|z+1|$ から　$|z-1|^2=5|z+1|^2$

ゆえに　$(z-1)(\overline{z}-1)=5(z+1)(\overline{z}+1)$

整理して　$z\overline{z}+\dfrac{3}{2}(z+\overline{z})+1=0$

よって　$\left(z+\dfrac{3}{2}\right)\left(\overline{z}+\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{5}{4}$ から　$\left|z+\dfrac{3}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

したがって，点 z は中心 $-\dfrac{3}{2}$，半径 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ の円周上にある.

(10) $y=\sqrt{a-4x}+b$ は減少関数であるから

$x=-4$ のとき最大となり　$\sqrt{a+16}+b=5$

$x=0$ のとき最小となり　$\sqrt{a}+b=3$

ゆえに　$\sqrt{a+16}=\sqrt{a}+2$

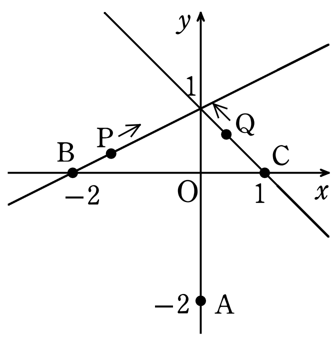
両辺を 2 乗すると　$a+16=a+4+4\sqrt{a}$

よって　$\sqrt{a}=3$　　したがって　$a=9$，$b=0$

2

解答　(1)　P$(2t-2,\ t)$，Q$(-2t+1,\ 2t)$　　(2)　$t=\dfrac{\sqrt{17}-1}{4}$

(1)　$\overrightarrow{v_1}=(2,\ 1)$ とすると，$\overrightarrow{v_1}$ は P が進む方向と同じ向きで　　$\left|\overrightarrow{v_1}\right|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$



よって，時刻 t における $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は次のように表される。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{v_1}=(-2,\ 0)+t(2,\ 1)=(2t-2,\ t)$

ゆえに，時刻 t における点 P の座標は　　$(2t-2,\ t)$

また，$\overrightarrow{v_2}=(-2,\ 2)$ とすると，$\overrightarrow{v_2}$ は Q が進む方向と同じ向きで　　$\left|\overrightarrow{v_2}\right|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$

よって，時刻 t における $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は次のように表される。

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{v_2}=(1,\ 0)+t(-2,\ 2)=(-2t+1,\ 2t)$

ゆえに，時刻 t における点 Q の座標は　$(-2t+1,\ 2t)$

(2)　3 点 A，P，Q が一直線上に並ぶとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ (k は実数) と表される。

(1) の結果より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(2t-2,\ t+2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(-2t+1,\ 2t+2)$ であるから

$$(2t-2,\ t+2)=k(-2t+1,\ 2t+2)$$

両辺の成分を比較して

$$2t-2=k(-2t+1) \quad \cdots\cdots ①$$

$$t+2=k(2t+2) \quad \cdots\cdots ②$$

① + ② から　$3t=3k$　　よって　$t=k$

これと ② から　$t+2=t(2t+2)$　　すなわち　$2t^2+t-2=0$

これを解くと　$t=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$

$t \geqq 0$ から，求める時刻 t は　$t=\dfrac{\sqrt{17}-1}{4}$

3

解答　(1) $\dfrac{16}{45}$　(2) $\dfrac{2}{5}$　(3) $\dfrac{11}{45}$　(4) $\dfrac{4}{75}$

手順 1 において，男子 3 人，男子 2 人と女子 1 人，男子 1 人と女子 2 人，女子 3 人が委員に選ばれるという事象をそれぞれ A，B，C，D とする。

28 人から 3 人の委員を選ぶ選び方は ${}_{28}\mathrm{C}_3$ 通りで，これらは同様に確からしい。

よって　$P(A)=\dfrac{{}_{15}\mathrm{C}_3}{{}_{28}\mathrm{C}_3}=\dfrac{\dfrac{15\cdot14\cdot13}{3\cdot2\cdot1}}{\dfrac{28\cdot27\cdot26}{3\cdot2\cdot1}}=\dfrac{5}{36}$，$P(B)=\dfrac{{}_{15}\mathrm{C}_2\cdot{}_{13}\mathrm{C}_1}{{}_{28}\mathrm{C}_3}=\dfrac{\dfrac{15\cdot14}{2\cdot1}\cdot13}{\dfrac{28\cdot27\cdot26}{3\cdot2\cdot1}}=\dfrac{15}{36}$

$P(C)=\dfrac{{}_{15}\mathrm{C}_1\cdot{}_{13}\mathrm{C}_2}{{}_{28}\mathrm{C}_3}=\dfrac{15\cdot\dfrac{13\cdot12}{2\cdot1}}{\dfrac{28\cdot27\cdot26}{3\cdot2\cdot1}}=\dfrac{5}{14}$，$P(D)=\dfrac{{}_{13}\mathrm{C}_3}{{}_{28}\mathrm{C}_3}=\dfrac{\dfrac{13\cdot12\cdot11}{3\cdot2\cdot1}}{\dfrac{28\cdot27\cdot26}{3\cdot2\cdot1}}=\dfrac{11}{126}$

(1)　男子 3 人，女子 1 人が委員に選ばれるのは，事象 A がおき，手順 2 で女子が選ばれる場合と，事象 B がおき，手順 2 で男子が選ばれる場合である。

これらは排反であるから，その確率は　$\dfrac{5}{36}\times1+\dfrac{15}{36}\times\dfrac{13}{25}=\dfrac{16}{45}$

(2)　男子 2 人，女子 2 人が委員に選ばれるのは，事象 B がおき，手順 2 で女子が選ばれる場合と，事象 C がおき，手順 2 で男子が選ばれる場合である。

これらは排反であるから，その確率は　$\dfrac{15}{36}\times\dfrac{12}{25}+\dfrac{5}{14}\times\dfrac{14}{25}=\dfrac{2}{5}$

(3)　男子 1 人，女子 3 人が委員に選ばれるのは，事象 C がおき，手順 2 で女子が選ばれる場合と，事象 D がおき，手順 2 で男子が選ばれる場合である。

これらは排反であるから，その確率は　$\dfrac{5}{14}\times\dfrac{11}{25}+\dfrac{11}{126}\times1=\dfrac{11}{45}$

別解　(1)，(2) より，男子 1 人，女子 3 人が委員に選ばれる確率は　$1-\left(\dfrac{16}{45}+\dfrac{2}{5}\right)=\dfrac{11}{45}$

(4)　男子２人，女子２人が委員に選ばれ，かつこの委員の中にクラスの特定の男子１名「藤田太郎」が含まれているのは，手順１で「藤田太郎」を含む男子２人と女子１人が選ばれ，手順２で女子が選ばれる場合と，手順１で「藤田太郎」と女子２人が選ばれ，手順２で 男子が選ばれる場合と，手順１で「藤田太郎」でない男子１人と女子２人が選ばれ，手順２で「藤田太郎」が選ばれる場合である。

これらは排反であるから，その確率は

$$\frac{1\times{}_{14}C_1\times{}_{13}C_1}{{}_{28}C_3}\times\frac{12}{25}+\frac{1\times{}_{13}C_2}{{}_{28}C_3}\times\frac{14}{25}+\frac{{}_{14}C_1\times{}_{13}C_2}{{}_{28}C_3}\times\frac{1}{25}$$

$$=\frac{2}{75}+\frac{1}{75}+\frac{1}{75}=\frac{4}{75}$$