兵庫医科大学対策1

$\boxed{1}$

(1) $P(x)$ を $(x-1)(x-3)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを ax^2+bx+c (a，b，c は定数) とすると　$P(x)=(x-1)(x-3)^2Q(x)+ax^2+bx+c$

ここで，$(x-1)(x-3)^2Q(x)$ は $(x-3)^2$ で割り切れるから，$P(x)$ を $(x-3)^2$ で割った余りは，ax^2+bx+c を $(x-3)^2$ で割った余りと等しい。

$P(x)$ を $(x-3)^2$ で割ると $2x-5$ 余るから　$ax^2+bx+c=a(x-3)^2+2x-5$

よって，$P(x)$ は定数 a を用いて

$$P(x)=(x-1)(x-3)^2Q(x)+a(x-3)^2+2x-5$$

と表される。

これに $x=1$ を代入すると　$P(1)=a(1-3)^2+2\cdot1-5=4a-3$

一方，$P(x)$ を $x-1$ で割った余りは 5 であるから，剰余の定理により　$P(1)=5$

よって　$4a-3=5$　　これを解くと　$a=2$

したがって，求める余りは　$2(x-3)^2+2x-5$　　すなわち　$2x^2-10x+13$

(2)　$x^2-ax+(a-1)=(x-1)\{x-(a-1)\}$

よって，2 次不等式 ① の解は

$a-1=1$ のとき　$x=1$ (整数 x は 1 つとなり不適)

$a-1<1$ のとき　$a-1\leqq x\leqq 1$

$1<a-1$ のとき　$1\leqq x\leqq a-1$

よって，不等式 ① を満たす整数 x は

$a-1<1$ のとき　$x=-1$，0，1　　$1<a-1$ のとき　$x=1$，2，3

よって，求める条件は　$-2<a-1\leqq -1$　または　$3\leqq a-1<4$

すなわち　$-1<a\leqq 0$，$4\leqq a<5$

a は整数であるから，$a-1$ も整数である。

[1]　$a-1=1$ すなわち $a=2$ のとき

① は　$(x-1)^2\leqq 0$

これを満たす整数 x は $x=1$ のみであるから　$N(2)=1$

[2]　$a-1<1$ すなわち $a<2$ のとき

① を満たす整数 x は　$a-1$，a，……，1

よって　$N(a)=1-(a-1)+1=3-a$

[3]　$1<a-1$ すなわち $a>2$ のとき

① を満たす整数 x は　1，2，……，$a-1$

よって　$N(a)=a-1-1+1=a-1$

[1]，[2]，[3] から，$N(a)$ は　$a=2$ のとき　$N(2)=1$

$a<2$ のとき　$N(a)=3-a$

$a>2$ のとき　$N(a)=a-1$

(3)①　$S_4=\sum_{k=1}^{4} ki^k=i+2i^2+3i^3+4i^4=i-2-3i+4=2-2i$

$$S_8=\sum_{k=1}^{8} ki^k=(i+2i^2+3i^3+4i^4)+(5i^5+6i^6+7i^7+8i^8)$$

$$=(2-2i)+(5i+6i^2+7i^3+8i^4)=2-2i+5i-6-7i+8=4-4i$$

② $S_{4m}=\sum_{k=1}^{4m} ki^k=\sum_{k=1}^{m}\{(4k-3)i+(4k-2)i^2+(4k-1)i^3+4ki^4\}$

$$=\sum_{k=1}^{m}\{(4k-3)i-(4k-2)-(4k-1)i+4k\}=\sum_{k=1}^{m}2(1-i)=2m(1-i)$$

参考 (1) から，$S_{4m}=2m(1-i)$ と推測できる。数学的帰納法によって，$S_{4m}=2m(1-i)$ を証明してもよい。

③ $2012=4\times 503$ であるから，(2) より

$$S_{2011}=\sum_{k=1}^{2011} ki^k=\sum_{k=1}^{2012} ki^k-2012i^{2012}=S_{4\times 503}-2012=1006(1-i)-2012$$

$$=-1006(1+i)$$

(4)① $y=x^3-kx$ ……① から $y'=3x^2-k$

よって，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^3-ka)$ における接線 ℓ の方程式は

$$y-(a^3-ka)=(3a^2-k)(x-a)$$

すなわち $y=(3a^2-k)x-2a^3$ ……②

①，② から y を消去すると $x^3-kx=(3a^2-k)x-2a^3$

整理すると $x^3-3a^2x+2a^3=0$ すなわち $(x-a)^2(x+2a)=0$

よって $x=a,\ -2a$

点 Q は点 $\mathrm{P}(a,\ a^3-ka)$ と異なる点であるから，$a\fallingdotseq -2a$ すなわち $a\fallingdotseq 0$ であり，

点 Q の x 座標は $-2a$

したがって $\mathrm{Q}(-2a,\ -8a^3+2ka)$

② 点 Q における曲線 C の接線を m とすると，接線 m の傾きは

$$3\cdot(-2a)^2-k=12a^2-k$$

m と ℓ が直交するから $(3a^2-k)(12a^2-k)=-1$

$a^2=t$ とおくと $(3t-k)(12t-k)=-1$

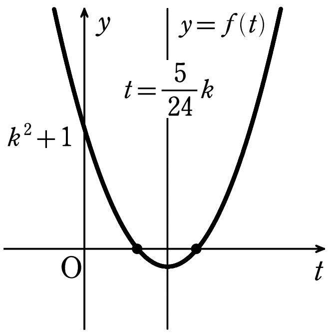
すなわち $36t^2-15kt+k^2+1=0$ ……③

ここで，a は 0 でない実数であるから $t>0$

よって，求める k のとりうる値の範囲は，t についての 2 次方程式 ③ が $t>0$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつような k の値の範囲である。

$f(t)=36t^2-15kt+k^2+1$ とおく。

$f(0)=k^2+1>0$ であるから，満たすべき条件は，次の [1]，[2] が同時に成り立つことである。



[1]　③ の判別式 D について

$$D=(-15k)^2-4\cdot 36\cdot(k^2+1)=9(9k^2-16)\geqq 0$$

これを解くと　　$k\leqq -\dfrac{4}{3}$，$\dfrac{4}{3}\leqq k$　……④

[2]　放物線 $y=f(t)$ の軸 $t=\dfrac{5}{24}k$ の位置について

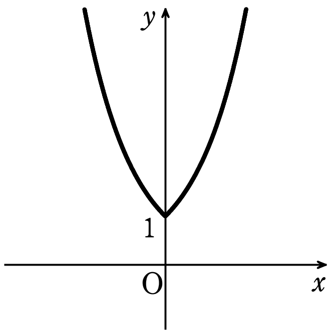
$\dfrac{5}{24}k>0$　　　　よって　　$k>0$　……⑤

④，⑤ の共通範囲を求めて　　$k\geqq\dfrac{4}{3}$

(5)　①$y=e^{|x|}$ は，$x\geqq 0$ のとき　　$y=e^x$

$x<0$ のとき　　$y=e^{-x}$

$y=e^{|x|}$ のグラフは右の図のようになる。



$y=e^x$ のとき　　$y'=e^x$

このとき，$x=0$ において　　$y'=1$

$y=e^{-x}$ のとき　　$y'=-e^{-x}$

このとき，$x=0$ において　　$y'=-1$

[1]　$b>1$ のとき

グラフから，① と ② は 2 つの共有点をもつ。

[2]　$b=1$ のとき

上の $x=0$ における y' の値から，① と ② がただ 1 つの共有点をもつための条件は

$$-1\leqq a\leqq 1$$

[3]　$b<1$ のとき

$y=e^x$ と $y=ax+b$ が $x=t\,(>0)$ で接するとすると

$e^t=at+b$　……③

$e^t=a$　　　……④

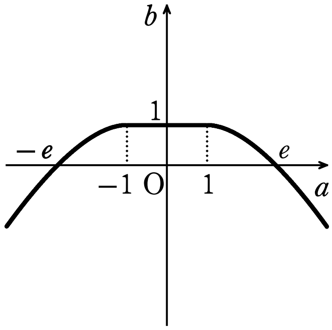
④ から　　$t=\log a$　　　　これを ③ に代入すると　　$a=a\log a+b$

すなわち　　$b=a-a\log a$

また，$t>0$ であるから，④ より　　$a>1$

同様に $y=e^{-x}$ と $y=ax+b$ が $x=t\,(<0)$ で接するときを考えると

$b=-a+a\log(-a)$　$(a<-1)$



$b=a-a\log a\ \ (a>1)$ について

$$\frac{db}{da}=1-1\cdot\log a-a\cdot\frac{1}{a}=-\log a<0$$

$$\frac{d^2b}{da^2}=-\frac{1}{a}<0$$

$b=a-a\log a\ \ (a>1)$ のグラフと

$b=-a+a\log(-a)\ \ (a<-1)$ のグラフは，b 軸に関して対称である。

よって，[1]，[2]，[3] から，求めるグラフは右の図のようになる。

② $pa+f(a)=k$ とおくと　　$f(a)=-pa+k$

直線 $b=-pa+k$ が $b=f(a)$ のグラフと共有点をもちながら動くときの，y切片 kの最大値を求める。

[1]　$p=0$ のとき　　$b=k$

(1) のグラフから，$-1\leqq a\leqq 1$ において kは最大値 1 をとる。

[2]　$p>0$ のとき

(1) のグラフから，直線 $b=-pa+k$ と $b=a-a\log a\ \ (a>1)$ が接するとき kは最大となる。

$b=a-a\log a$ より $\dfrac{db}{da}=-\log a$ であるから，$-p=-\log a$，すなわち $a=e^p$ のとき kは最大となる。

このとき，最大値は　　$k=pa+a-a\log a=pe^p+e^p-e^p\log e^p=e^p$

[3]　$p<0$ のとき

(1) のグラフから，直線 $b=-pa+k$ と $b=-a+a\log(-a)\ \ (a<-1)$ が接するとき kは最大となる。

$b=-a+a\log(-a)$ より $\dfrac{db}{da}=\log(-a)$ であるから，$-p=\log(-a)$，すなわち $a=-e^{-p}$ のとき kは最大となる。

このとき，最大値は

$$k=pa-a+a\log(-a)=-pe^{-p}+e^{-p}-e^{-p}\log e^{-p}=e^{-p}$$

[1]，[2]，[3] から，$pa+f(a)$ は

$p=0$ のとき，$-1\leqq a\leqq 1$ で最大値 1；

$p>0$ のとき，$a=e^p$ で最大値 e^p；

$p<0$ のとき，$a=-e^{-p}$ で最大値 e^{-p}　をとる。

2

解答　(1)　$R_n=1-\dfrac{1}{2^{n-2}}+\dfrac{1}{3^{n-1}}$　　(2)　ない

(3)　$m=n=1$ のとき　$P_1=Q_1$ となる

(1)　$n+1$ 秒後に状態 A である確率は

$$P_{n+1}=\frac{1}{2}P_n \qquad P_1=\frac{1}{2}\ \text{であるから} \qquad P_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

また，$n+1$ 秒後に状態 B である確率は

$$Q_{n+1}=\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{3}Q_n \qquad ゆえに \qquad Q_{n+1}-\frac{1}{3}Q_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

両辺に 2^{n+1} を掛けて　　$2^{n+1}Q_{n+1}-\frac{2}{3}\cdot 2^nQ_n=1$

$2^nQ_n=X_n$ とおくと　　$X_{n+1}-\frac{2}{3}X_n=1$　　　ゆえに　　$X_n-3=\frac{2}{3}(X_{n-1}-3)$

$Q_1=\frac{1}{2}$ より $X_1=1$ であるから，数列 $\{X_n-3\}$ は初項 -2，公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列で

$$X_n-3=-2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \qquad よって \qquad X_n=3-2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

ゆえに　　$Q_n=\frac{X_n}{2^n}=\frac{3}{2^n}-\frac{1}{3^{n-1}}=3\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$

よって，$R_n=1-(P_n+Q_n)$ であるから

$$R_n=1-\left(\frac{4}{2^n}-\frac{3}{3^n}\right)=1-\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{1}{3^{n-1}}$$

(2)　(1) から　　$Q_{n+1}=3\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)$

$$Q_{n+1}-Q_n=3\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)-3\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)=3\left(\frac{2}{3^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$=\frac{3}{2^{n+1}}\left\{2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-1\right\}\leqq\frac{3}{2^{n+1}}\left(2\cdot\frac{4}{9}-1\right)<0$$

ゆえに　　$Q_1>Q_2>Q_3>\cdots\cdots$

よって，異なる m，n で $Q_m=Q_n$ となることはない。

(3)　$Q_n=3\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{3^n-2^n}{3^{n-1}}$ であるから，2 以上の自然数 n について，

$Q_n=\frac{1}{2^\alpha}$ (α は自然数) の形にはならない。

ここで，$n=1$ のとき　　$Q_1=\frac{1}{2}$，$P_1=\frac{1}{2}$

したがって，$m=n=1$ のとき $P_1=Q_1$ となるから，$P_m=Q_n$ となることはある。

$\boxed{3}$

解答　(1)　P$(5,\ 0,\ 0)$，Q$(0,\ 5,\ 0)$　　(2)　$\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{5\sqrt{10}}{2}\right)$　　(3)　$\frac{125\sqrt{10}}{12}$

(4)　$\frac{3\sqrt{10}}{2}$　　(5)　$\frac{3}{5}(\sqrt{11}+\sqrt{5}+1)$

(1)　球面 S の方程式は　　$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-\sqrt{10})^2=(3\sqrt{3})^2$　$\cdots\cdots$ ①

x 軸との交点は ① に $y=0$，$z=0$ を代入して　　$(x-1)^2+1+10=27$

これを解くと　　$x=5,\ -3$

P の x 座標は正であるから　　P$(5,\ 0,\ 0)$

y 軸との交点は ① に $x=0$，$z=0$ を代入して　　$1+(y-1)^2+10=27$

これを解くと　　$y=5,\ -3$

Q の y 座標は正であるから　　Q $(0,\ 5,\ 0)$

(2)　点 R は直線 OC 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ (t は実数) と表される。

すなわち　　R $(t,\ t,\ \sqrt{10}\,t)$

点 R は S 上にあるから ① に代入して　　$(t-1)^2+(t-1)^2+(\sqrt{10}\,t-\sqrt{10})^2=27$

これを解くと　　$t=\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{1}{2}$

R の z 座標は正であるから　　$t=\dfrac{5}{2}$

よって，R の座標は　　$\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{2},\ \dfrac{5\sqrt{10}}{2}\right)$

(3)　$\triangle\mathrm{OPQ}=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot5=\dfrac{25}{2}$ であるから　　$V=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{25}{2}\cdot\dfrac{5\sqrt{10}}{2}=\dfrac{125\sqrt{10}}{12}$

(4)　$\triangle\mathrm{OPQ}$ は $\angle\mathrm{POQ}=90^\circ$ の直角三角形であるから，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の外心は斜辺の中点 E$\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{2},\ 0\right)$ となる。

よって，4 点 O，P，Q，R を通る球面の中心の座標は $\mathrm{C}'\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{2},\ k\right)$ $(k>0)$ と表される。

$\mathrm{C'O}=\mathrm{C'R}$ から　　$\sqrt{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(\dfrac{5}{2}\right)^2+k^2}=\left|k-\dfrac{5\sqrt{10}}{2}\right|$

これを解くと　　$k=\sqrt{10}$

よって　　$r_1=\mathrm{C'R}=\left|\sqrt{10}-\dfrac{5\sqrt{10}}{2}\right|=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$

(5)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(5,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(0,\ 5,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{2},\ \dfrac{5\sqrt{10}}{2}\right)$ より

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=5$，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=5$，$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=5\sqrt{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{25}{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{25}{2}$

$\triangle\mathrm{OPR}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{25\cdot75-\left(\dfrac{25}{2}\right)^2}=\dfrac{25\sqrt{11}}{4}$

$\triangle\mathrm{OQR}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{25\cdot75-\left(\dfrac{25}{2}\right)^2}=\dfrac{25\sqrt{11}}{4}$

$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{RE}=\dfrac{1}{2}\cdot5\sqrt{2}\cdot\dfrac{5\sqrt{10}}{2}=\dfrac{25\sqrt{5}}{2}$

ここで　　$V=\dfrac{r_2}{3}(\triangle\mathrm{OPQ}+\triangle\mathrm{OPR}+\triangle\mathrm{OQR}+\triangle\mathrm{PQR})$

(3) より　　$\dfrac{125\sqrt{10}}{12}=\dfrac{r_2}{3}\left(\dfrac{25}{2}+\dfrac{25\sqrt{11}}{4}+\dfrac{25\sqrt{11}}{4}+\dfrac{25\sqrt{5}}{2}\right)$

よって　　$r_2=\dfrac{5\sqrt{10}}{2(\sqrt{11}+\sqrt{5}+1)}$

(4) から　　$\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}\cdot\dfrac{2(\sqrt{11}+\sqrt{5}+1)}{5\sqrt{10}}=\dfrac{3}{5}(\sqrt{11}+\sqrt{5}+1)$