$\boxed{1}$

(1)　$\overrightarrow{AB}=(-5,\ 0,\ -8)$,

　$\overrightarrow{AC}=(2,\ 1,\ -2)$,

　$\overrightarrow{AD}=(6,\ 4,\ 2x-8)$

4点A，B，C，Dは同じ平面上にあるから，

$$\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$$

を満たす実数 s，t が存在する。

よって　$(6,\ 4,\ 2x-8)=s(-5,\ 0,\ -8)+t(2,\ 1,\ -2)$

ゆえに　$6=-5s+2t$，$4=t$，$2x-8=-8s-2t$

よって　$s=\dfrac{2}{5}$，$t=4$，$x=-\dfrac{8}{5}$

点Eは直線AD上にあるから

$$\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AD}\quad(k\text{ は実数})$$

ゆえに，(1)から　$\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{5}k\overrightarrow{AB}+4k\overrightarrow{AC}$

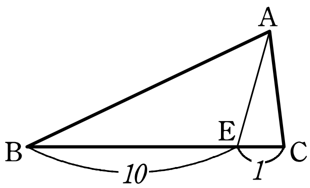
点Eは直線BC上にあるから

$$\frac{2}{5}k+4k=1$$

よって　$k=\dfrac{5}{22}$

このとき，$\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{11}\overrightarrow{AB}+\dfrac{10}{11}\overrightarrow{AC}$ であるから，

点Eは線分BCを10：1に内分する。



ゆえに　$\triangle ACE=\dfrac{1}{11}\triangle ABC$　…… ①

ここで　$|\overrightarrow{AB}|^2=89$，$|\overrightarrow{AC}|^2=9$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6$

よって　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$

$$=\frac{3\sqrt{85}}{2}$$

ゆえに，① から　$\triangle ACE=\dfrac{3\sqrt{85}}{22}$

(2) $a0b_{(5)}$ は5進数であるから　$1\leqq a\leqq 4$，$0\leqq b\leqq 4$

$ba6_{(7)}$ は7進数であるから　$1\leqq b\leqq 6$，$0\leqq a\leqq 6$

よって　$1\leqq a\leqq 4$，$1\leqq b\leqq 4$　…… ①

N を10進法で表すと

$$N=a0b_{(5)}=a\cdot 5^2+0\cdot 5^1+b\cdot 5^0=25a+b$$

$$N=ba6_{(7)}=b\cdot 7^2+a\cdot 7^1+6\cdot 7^0=49b+7a+6$$

ゆえに　$25a+b=49b+7a+6$

整理すると　$18a-48b=6$　　よって　$3a-8b=1$

これと ① を満たす整数 a，b の組は　$(a,\ b)=(3,\ 1)$

したがって　$a=3$，$b=1$，$N=25\cdot3+1=76$

(3)　$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)3^{n+1}{}_{100}\mathrm{C}_{n+1}}{n\,3^n{}_{100}\mathrm{C}_n}$$

$$=\frac{3(n+1)}{n}\cdot\frac{100!}{\{100-(n+1)\}!(n+1)!}\cdot\frac{(100-n)!\,n!}{100!}$$

$$=\frac{3(100-n)}{n}$$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1$ とすると，(1) から　$\dfrac{3(100-n)}{n}>1$

すなわち　$3(100-n)>n$　　これを解くと　$n<75$

よって，$n<75$ のとき　$a_{n+1}>a_n$

同様に考えて，$n=75$ のとき　$a_{n+1}=a_n$

$n>75$ のとき　$a_n>a_{n+1}$

したがって　$a_1<a_2<\cdots\cdots<a_{75}=a_{76}>a_{77}>\cdots\cdots>a_{100}$

ゆえに，a_n が最大になるような n は　$n=75,\ 76$

$\boxed{2}$

(1)　$P(x)=4x^4+4x^3-9x^2-x+2$ とおくと

$$P(1)=4\cdot1^4+4\cdot1^3-9\cdot1^2-1+2=0$$

よって，$P(x)$ は $x-1$ で割り切れる。

ゆえに　$P(x)=(x-1)(4x^3+8x^2-x-2)$

$=(x-1)\{4x^2(x+2)-(x+2)\}$

$=(x-1)(x+2)(4x^2-1)$

$=(x-1)(x+2)(2x+1)(2x-1)$

$$\begin{array}{r|l}
 & 4x^3+8x^2-x-2 \\
\hline
x-1 & 4x^4+4x^3-9x^2-x+2 \\
 & 4x^4-4x^3 \\
\hline
 & 8x^3-9x^2 \\
 & 8x^3-8x^2 \\
\hline
 & -x^2\ -x \\
 & -x^2\ +x \\
\hline
 & -2x+2 \\
 & -2x+2 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

方程式の左辺を因数分解して

$$(\sin\theta-1)(\sin\theta+2)(2\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)=0$$

$\sin\theta+2\fallingdotseq 0$ より　$\sin\theta=1,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\sin\theta=1$ を解くと　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$

$\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$ を解くと　$\theta=\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ を解くと　$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

よって，方程式の解は　$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

(2)人数は 10 人であるから，大きい方から 5 番目と 6 番目の得点の平均値が中央値 M と

なる。

A 以外の値を小さい順に並べると

$$36,\ 43,\ 46,\ 48,\ 50,\ 55,\ 64,\ 65,\ 71$$

[1]　$A \leqq 48$ のとき

5 番目の得点は 48 点，6 番目の得点は 50 点であるから，

中央値 M は　$M = \dfrac{48+50}{2} = 49.0$（点）

[2]　$A \geqq 55$ のとき

5 番目の得点は 50 点，6 番目の得点は 55 点であるから，

中央値 M は　$M = \dfrac{50+55}{2} = 52.5$（点）

[3]　$49 \leqq A \leqq 54$ のとき

5 番目，6 番目の得点は A 点か 50 点のいずれかであるから，

中央値 M は　$M = \dfrac{A+50}{2}$（点）

この値は，A の値によってすべて異なり，[1]，[2] の 49.0 点，52.5 点とも異なる。

したがって，中央値 M は，

$$2+(54-49+1)=8 \text{（通り）}$$

の値があり得る。

また，平均値が 54.0 点であるとき

$$\frac{1}{10}(43+55+A+64+36+48+46+71+65+50)=54.0$$

これを解いて　$A=62$

$A \geqq 55$ であるから，中央値 M の値は　$M=52.5$

$\boxed{3}$

(1)　C_2 の方程式を $y=ax^2+bx+c$ とすると，C_2 が原点を通ることから　　$c=0$

よって　　$C_2:\ y=ax^2+bx$

曲線 C_2 は点 $\left(p,\ \dfrac{1}{p^2}\right)$ を通るから　　$\dfrac{1}{p^2}=ap^2+bp$　…… ①

$y=\dfrac{1}{x^2}$ に対して $y'=-\dfrac{2}{x^3}$ であるから，曲線 C_1 の点 P における接線の傾きは

$$-\frac{2}{p^3}$$

$y=ax^2+bx$ に対して $y'=2ax+b$ であるから，曲線 C_2 の点 P における接線の傾きは

$$2ap+b$$

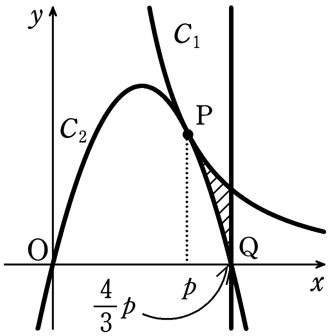
ゆえに　　$-\dfrac{2}{p^3}=2ap+b$　　　　よって　　$b=-2ap-\dfrac{2}{p^3}$　…… ②

② を ① に代入して　　$\dfrac{1}{p^2}=ap^2-2ap^2-\dfrac{2}{p^2}$

ゆえに　　$a=-\dfrac{3}{p^4}$　　　　よって，② から　　$b=\dfrac{4}{p^3}$

ゆえに，求める C_2 の方程式は　　$y=-\dfrac{3}{p^4}x^2+\dfrac{4}{p^3}x$

(2)　$-\dfrac{3}{p^4}x^2+\dfrac{4}{p^3}x=0$ とすると　　$x(3x-4p)=0$



よって　　$x=0,\ \dfrac{4}{3}p$

ゆえに，点 Q の x 座標は $\dfrac{4}{3}p$ であり，求める面積 S は

$$S=\int_p^{\frac{4}{3}p}\left\{\frac{1}{x^2}-\left(-\frac{3}{p^4}x^2+\frac{4}{p^3}x\right)\right\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{x}+\frac{1}{p^4}x^3-\frac{2}{p^3}x^2\right]_p^{\frac{4}{3}p}$$

$$=\frac{7}{108p}$$

$\boxed{4}$

(1)　$y=(\sqrt{x}-\sqrt{2})^2$ から　　$y=x-2\sqrt{2}\sqrt{x}+2$ …… ①

① の両辺を x で微分すると　　$\dfrac{dy}{dx}=1-2\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

すなわち　　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$

$\dfrac{dy}{dx}=0$ とすると　　$\sqrt{x}=\sqrt{2}$　　　　すなわち　　$x=2$

ここで，x がとりうる値の範囲は　　$x \geqq 0$

よって，$x \geqq 0$ における y の値の変化は右の表のようになり，曲線 C の概形は右下の図のようになる。

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$\dfrac{dy}{dx}$		$-$	0	$+$
y	2	↘	0	↗

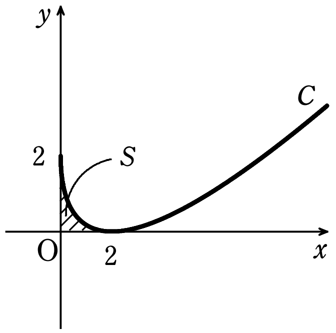
ゆえに，求める面積 S は図の斜線部分の面積であるから，① より

$$S=\int_0^2 (x-2\sqrt{2}\sqrt{x}+2)\,dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-2\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x\right]_0^2$$

$$=2-\frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot 2\sqrt{2}+4$$

$$=\frac{2}{3}$$



(2)　$y=(\sqrt{x}-\sqrt{2})^2$，$y=2$ から y を消去して　　$(\sqrt{x}-\sqrt{2})^2=2$

よって　　$\sqrt{x}-\sqrt{2}=\pm\sqrt{2}$

これを解くと　　$x=0,\ 8$

ゆえに，求める体積 V は，右の図の斜線部分を直線 $y=2$ の周りに 1 回転してできる立体の体積である。

よって，① より

$$V=\pi\int_0^8 (2-y)^2\,dx$$

$$=\pi\int_0^8 \{2-(x-2\sqrt{2}\sqrt{x}+2)\}^2\,dx$$

$$=\pi\int_0^8 \{-(x-2\sqrt{2}\sqrt{x})\}^2\,dx$$

$$=\pi\int_0^8 \left(x^2-4\sqrt{2}\,x^{\frac{3}{2}}+8x\right)dx$$

$$=\pi\left[\frac{x^3}{3}-4\sqrt{2}\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+4x^2\right]_0^{2^3}$$

$$=\pi\cdot 2^8\left(\frac{2}{3}-\frac{2^3}{5}+1\right)=\pi\cdot 2^8\cdot\frac{1}{15}$$

$$=\frac{256}{15}\pi$$