$\boxed{1}$

解答　（ア）a　（イ）$\dfrac{3}{2a}$　（ウ）$\dfrac{2a}{2a^2+9}$　（エ）$\dfrac{6a}{2a^2+9}$　（オ）3

（カ）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　（キ）$a+\dfrac{9}{2a}-1$　（ク）$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　（ケ）$3\sqrt{2}-1$

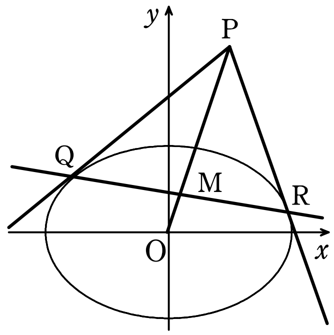
解説

Q$(x_1,\ y_1)$，R$(x_2,\ y_2)$ とすると，Q，R における接線の方程式はそれぞれ

$$ax_1x+\frac{y_1}{2a}y=1,\quad ax_2x+\frac{y_2}{2a}y=1$$

これらがいずれも点 P$(1,\ 3)$ を通るとすると

$$ax_1+\frac{3y_1}{2a}=1,\quad ax_2+\frac{3y_2}{2a}=1$$



この 2 つの等式が成り立つから，Q，R はともに直線

$$^{ア}ax+{}^{イ}\frac{3}{2a}y=1 \quad \cdots\cdots ①$$

の上にある。2 点 を通る直線はただ 1 つであるので，これが直線 QR の方程式である。

① を変形して　$y=-\dfrac{2a^2}{3}x+\dfrac{2a}{3}$

これを楕円の方程式に代入すると　$ax^2+\dfrac{1}{2a}\left(-\dfrac{2a^2}{3}x+\dfrac{2a}{3}\right)^2=1$

整理して　$\left(\dfrac{2a^3}{9}+a\right)x^2-\dfrac{4a^2}{9}x+\dfrac{2a}{9}-1=0$

x_1，x_2 はこの 2 次方程式の 2 つの解であるから，解と係数の関係により

$$x_1+x_2=\frac{\dfrac{4a^2}{9}}{\dfrac{2a^3}{9}+a}=\frac{4a}{2a^2+9} \quad \cdots\cdots ②$$

M$(X,\ Y)$ とおくと　$X=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{2a}{2a^2+9}$ である。

また　$y_1=-\dfrac{2a^2}{3}x_1+\dfrac{2a}{3}$，$y_2=-\dfrac{2a^2}{3}x_2+\dfrac{2a}{3}$

② から　$y_1+y_2=-\dfrac{2a^2}{3}(x_1+x_2)+\dfrac{4a}{3}=-\dfrac{8a^3}{3(2a^2+9)}+\dfrac{4a}{3}=\dfrac{12a}{2a^2+9}$

ゆえに　$Y=\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{6a}{2a^2+9}$

したがって，M の座標は　$\left({}^{ウ}\dfrac{2a}{2a^2+9},\ {}^{エ}\dfrac{6a}{2a^2+9}\right)$

また，$Y=3X$ であるから，M は直線 $y={}^{オ}3x$ 上にある。

PQ＝PR のとき　PM$\perp$QR　$\cdots\cdots$ ③

P，M はともに直線 $y=3x$ 上にあるから 直線 PM の傾きは　3

① から直線 QR の傾きは　$-\frac{2a^2}{3}$　③ から　$3\cdot\left(-\frac{2a^2}{3}\right)=-1$

よって　$a^2=\frac{1}{2}$　$a>0$ より　$a={}^{カ}\frac{\sqrt{2}}{2}$　O，M，P が同一直線上にあるから

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{OM}}=\frac{\mathrm{OP}-\mathrm{OM}}{\mathrm{OM}}=\frac{1-\frac{2a}{2a^2+9}}{\frac{2a}{2a^2+9}}=\frac{2a^2-2a+9}{2a}={}^{キ}a+\frac{9}{2a}-1$$

$a>0$ であるから　$\frac{S_1}{S_2}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{9}{2a}}-1=3\sqrt{2}-1$

等号は $a=\frac{9}{2a}$ すなわち $a=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき成り立つ。

よって，比 $\frac{S_1}{S_2}$ は $a={}^{ク}\frac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき最小値 ${}^{ケ}3\sqrt{2}-1$ をとる。

2

解答　（ア）0　（イ）$\sqrt{3}$　（ウ）$\frac{\sqrt{6}}{2}$　（エ）$\sqrt{6}$　（オ）$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

（カ）$-\frac{2\sqrt{6}}{3}$　（キ）$\frac{3\sqrt{3}}{4}$　（ク）$\frac{9\sqrt{6}}{8}$　（ケ）$2\sqrt{2}$

解説

(1)　$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ から　$0\leqq\sqrt{3}\sin\theta\leqq\sqrt{3}$　すなわち　${}^{ア}0\leqq x\leqq{}^{イ}\sqrt{3}$

また，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ において　$\frac{dx}{d\theta}=\sqrt{3}\cos\theta\,(\neq 0)$，　$\frac{dy}{d\theta}=2\sqrt{6}\cos 2\theta$

よって　$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{2\sqrt{6}\cos 2\theta}{\sqrt{3}\cos\theta}=\frac{2\sqrt{2}\cos 2\theta}{\cos\theta}$

$\frac{dy}{dx}=0$ とすると　$\cos 2\theta=0$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲で，これを満たす θ は　$\theta=\frac{\pi}{4}$

$\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき　$x=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，　$y=\sqrt{6}\cdot 1=\sqrt{6}$

よって，$f'(x)=0$ を満たす x がただ 1 つあり，その値を α とすると

$$\alpha = {}^{ウ}\frac{\sqrt{6}}{2},\qquad f(\alpha) = {}^{エ}\sqrt{6}$$

また，θ の値に対応した x, y の値の変化は右の表のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{d\theta}$		$+$	$+$	$+$	
x	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\nearrow$	$\sqrt{3}$
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\sqrt{6}$	$\searrow$	0

$x=\sqrt{2}$ に対応する θ の値を $\theta_0\left(0<\theta_0<\frac{\pi}{2}\right)$

とすると　$\sqrt{2}=\sqrt{3}\sin\theta_0$

よって　$\sin\theta_0=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$0<\theta_0<\frac{\pi}{2}$ より　$\cos\theta_0=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

ゆえに　$f(\sqrt{2})=\sqrt{6}\sin 2\theta_0=2\sqrt{6}\sin\theta_0\cos\theta_0=2\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}={}^{オ}\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$$f'(\sqrt{2})=\frac{2\sqrt{2}\cos 2\theta_0}{\cos\theta_0}=\frac{2\sqrt{2}(1-2\sin^2\theta_0)}{\cos\theta_0}=\frac{2\sqrt{2}\left\{1-2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2\right\}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$={}^{カ}-\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

(2)　$\mathrm{OP}^2=(\sqrt{3}\sin\theta)^2+(\sqrt{6}\sin 2\theta)^2$

$$=3\sin^2\theta+(2\sqrt{6}\sin\theta\cos\theta)^2$$
$$=3\sin^2\theta+24\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)$$
$$=-24\sin^4\theta+27\sin^2\theta$$
$$=-24\left(\sin^2\theta-\frac{9}{16}\right)^2+24\cdot\left(\frac{9}{16}\right)^2$$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ より，$\sin^2\theta$ のとりうる値の範囲は $0\leqq\sin^2\theta\leqq 1$ であるから，OP^2 は

$\sin^2\theta=\frac{9}{16}$ のとき最大値 $24\cdot\left(\frac{9}{16}\right)^2$ をとる。

また，$\mathrm{OP}\geqq 0$ であるから，OP^2 が最大となるとき，OP も最大となる。

$\sin\theta\geqq 0$ より，$\sin^2\theta=\frac{9}{16}$ のとき　$\sin\theta=\frac{3}{4}$

このとき，点 P の x 座標は　$\sqrt{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

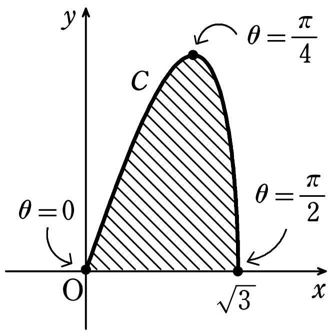
したがって，OP は，点 P の x 座標が ${}^{キ}\frac{3\sqrt{3}}{4}$ のとき最大値

$$\sqrt{24\cdot\left(\frac{9}{16}\right)^2}=2\sqrt{6}\cdot\frac{9}{16}={}^{ク}\,\frac{9\sqrt{6}}{8}$$

をとる。

(3)　曲線 C の概形は右の図のようになる。

よって，求める面積を S とすると，S は右の図の斜線部分の面積である。



ゆえに　$S=\int_0^{\sqrt{3}} y\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{6}\sin 2\theta\cdot\frac{dx}{d\theta}d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{6}\cdot 2\sin\theta\cos\theta\cdot\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta$$

$$=6\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta=-6\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\cdot(\cos\theta)'d\theta$$

$$=-6\sqrt{2}\left[\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}={}^{ケ}\,2\sqrt{2}$$

3

解答　(ア) $\frac{\sqrt{7}}{4}$　(イ) $\sqrt{2}$　(ウ) $\frac{\pi}{6}$　(エ) $\frac{5}{6}\pi$　(オ) $\frac{3}{2}\pi$

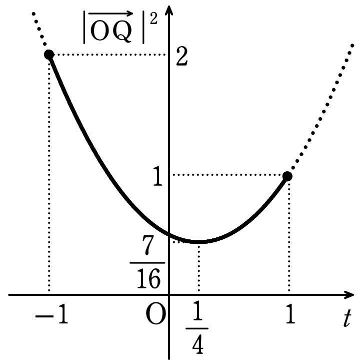
解説

$\cos 2\theta=t$ とおくと

$$|\overrightarrow{OQ}|^2=\cos^2 2\theta+\sin^2\theta$$

$$=\cos^2 2\theta+\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$$

$$=\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}$$



$0\leqq\theta<2\pi$ のとき $-1\leqq\cos 2\theta\leqq 1$ であるから

$$\frac{7}{16}\leqq|\overrightarrow{OQ}|^2\leqq 2$$

したがって　${}^{ア}\,\frac{\sqrt{7}}{4}\leqq|\overrightarrow{OQ}|\leqq{}^{イ}\,\sqrt{2}$

また，$\overrightarrow{OP}/\!/\overrightarrow{OQ}$ となるとき，$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$ となる実数 k が存在するから

$$k=\cos 2\theta,\quad k=\sin\theta$$

ゆえに　$\cos 2\theta=\sin\theta$　　よって　$1-2\sin^2\theta=\sin\theta$

すなわち　$(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)=0$　　ゆえに　$\sin\theta=\frac{1}{2},\ -1$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta={}^{ウ}\,\frac{\pi}{6},\ {}^{エ}\,\frac{5}{6}\pi,\ {}^{オ}\,\frac{3}{2}\pi$

4

解答 (ア) $-\dfrac{5}{12}$ (イ) $\dfrac{169}{24}$ (ウ) $\dfrac{33}{8}$ (エ) $\dfrac{12}{5}$ (オ) $\dfrac{2}{3}$ (カ) $\dfrac{1}{2}$

(キ) $-\dfrac{1}{2}$ (ク) 7 (ケ) 6 (コ) 4

解説

線分 OB の垂直二等分線は，線分 OB の中点 $\left(\dfrac{5}{2},\ 6\right)$ を通り，OB に垂直な直線であるから，その方程式は

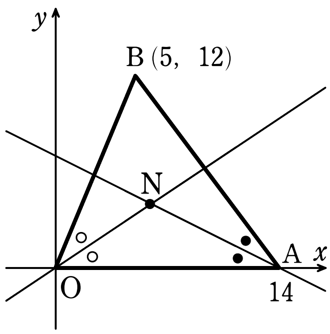
$$y-6=-\frac{5}{12}\left(x-\frac{5}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad y={}^{ア}-\frac{5}{12}x+{}^{イ}\frac{169}{24}$$

△OAB の外心 M は，線分 OA の垂直二等分線 $x=7$ と線分 OB の垂直二等分線の交点であるから，その y 座標は $y=-\dfrac{5}{12}\cdot 7+\dfrac{169}{24}=\dfrac{33}{8}$

よって，M の座標は $\left(7,\ {}^{ウ}\dfrac{33}{8}\right)$

$\angle\mathrm{AOB}=2\alpha$ とおくと $\tan 2\alpha=$(直線 OB の傾き)$={}^{エ}\dfrac{12}{5}$

ゆえに，加法定理により $\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{12}{5}$



整理すると $6\tan^2\alpha+5\tan\alpha-6=0$

したがって $(3\tan\alpha-2)(2\tan\alpha+3)=0$

$0<2\alpha<\pi$ から $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

よって，$\tan\alpha>0$ であるから

$$\tan\alpha={}^{オ}\frac{2}{3} \quad \cdots\cdots ①$$

同様に，$\angle\mathrm{OAB}=2\beta$ とおくと $\tan 2\beta=-$(直線 AB の傾き)$=\dfrac{4}{3}$

ゆえに，加法定理により $\dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=\dfrac{4}{3}$

整理すると $2\tan^2\beta+3\tan\beta-2=0$

したがって $(2\tan\beta-1)(\tan\beta+2)=0$

$\tan\beta>0$ であるから $\tan\beta={}^{カ}\dfrac{1}{2}$

よって，$\angle\mathrm{OAB}$ の二等分線の傾きは $-\dfrac{1}{2}$

また，$\angle\mathrm{OAB}$ の二等分線は A (14, 0) を通るから，その方程式は

$$y-0=-\frac{1}{2}(x-14) \quad \text{すなわち} \quad y={}^{キ}-\frac{1}{2}x+{}^{ク}7 \quad \cdots\cdots ②$$

① から，∠AOB の二等分線の方程式は　$y=\frac{2}{3}x$　…… ③

△OAB の内心 N は，2 直線 ②，③ の交点であるから，②，③ を連立して解くと

$x=6$，$y=4$　　よって，N の座標は　(ケ6，コ4)

$\boxed{5}$

解答　(ア)　4　(イウ)　36　(エ)　⓪　(オ)　⑦　(カ)　⓪　(キ)　⓪

$\frac{(ク)}{(ケコ)}$　$\frac{9}{32}$　$\frac{(サ)}{(シス)}$　$\frac{3}{32}$　$\frac{(セソタ)}{(チツ)}$　$\frac{185}{32}$

解説

(1)　a，b，c がすべて同じ数である玉の取り出し方は

$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 1),\ (2,\ 2,\ 2),\ (3,\ 3,\ 3),\ (4,\ 4,\ 4)$

となる場合の ア4 通り。

次に，a，b，c の中の 2 つが同じ数であり，残りの 1 つがそれと異なる数である玉の取り出し方の総数を求める。

a，b，c のうち，同じ数になるものの選び方が　${}_3C_2$ 通り

それぞれの選び方について，同じ数の選び方が 1，2，3，4 の　4 通り

それと異なる数の選び方が　3 通り

よって，求める取り出し方の総数は　${}_3C_2\times4\times3=$ イウ36 (通り)

(2)　a，b，c が，それぞれ与えられた数であるときの

$a^3,\ b^3,\ c^3,\ a^2b,\ ab^2,\ b^2c,\ bc^2,\ c^2a,\ ca^2,\ abc$　……(＊)

の値は，次の表のようになる。

	a^3	b^3	c^3	a^2b	ab^2	b^2c	bc^2	c^2a	ca^2	abc
$a=1$，$b=2$，$c=3$	1	8	27	2	4	12	18	9	3	6
$a=1$，$b=2$，$c=4$	1	8	64	2	4	16	32	16	4	8
$a=1$，$b=3$，$c=4$	1	27	64	3	9	36	48	16	4	12
$a=2$，$b=3$，$c=4$	8	27	64	12	18	36	48	32	16	24

$a=1$，$b=2$，$c=3$ のとき，(＊) の値はすべて異なる。

よって，得点は 10 点である。　ゆえに　エ⓪

$a=1$，$b=2$，$c=4$ のとき，(＊) の中で異なるものは，小さい順に

1，2，4，8，16，32，64　(7 個)

よって，得点は 7 点である。　ゆえに　オ⑦

$a=1$，$b=3$，$c=4$ のとき，(＊) の値はすべて異なる。

よって，得点は 10 点である。　ゆえに　カ⓪

$a=2$，$b=3$，$c=4$ のとき，(＊) の値はすべて異なる。

よって，得点は 10 点である。　ゆえに　キ⓪

(3)　玉の取り出し方は全部で　　$4^3=64$ (通り)

$a=1$，$b=2$，$c=3$ のときの得点は 10 点であり，条件と (2) より，a，b，c の 3 つの数の組合せが $\{1, 2, 3\}$，$\{1, 3, 4\}$，$\{2, 3, 4\}$ のとき，得点が 10 点となる。

ここで，例えば a，b，c の 3 つの数の組合せが $\{1, 2, 3\}$ であるとき，玉の取り出し方は，a，b，c が 1，2，3 のどの数になるかを考えて　　$3!=6$ (通り)

同様に，組合せが $\{1, 3, 4\}$，$\{2, 3, 4\}$ のときもそれぞれ 6 通りずつあるから，得点が $a=1$，$b=2$，$c=3$ のときの得点と同じになる確率は　　$\dfrac{6\times3}{64}=\dfrac{{}^{ク}9}{{}^{ケコ}32}$

また，$a=1$，$b=2$，$c=4$ のときの得点は 7 点であり，得点が 7 点となるのは，a，b，c の 3 つの数の組合せが $\{1, 2, 4\}$ のときだけである。

玉の取り出し方は，上と同様に $3!=6$ (通り) であるから，得点が $a=1$，$b=2$，$c=4$ のときの得点と同じになる確率は　　$\dfrac{6}{64}=\dfrac{{}^{サ}3}{{}^{シス}32}$

また，とりうる得点は 1 点，4 点，7 点，10 点 の 4 通りであり，(1) より

得点が 1 点となる確率は　　$\dfrac{4}{64}=\dfrac{2}{32}$

得点が 4 点となる確率は　　$\dfrac{36}{64}=\dfrac{18}{32}$

したがって，求める期待値は　　$1\cdot\dfrac{2}{32}+4\cdot\dfrac{18}{32}+7\cdot\dfrac{3}{32}+10\cdot\dfrac{9}{32}=\dfrac{{}^{セソタ}185}{{}^{チツ}32}$