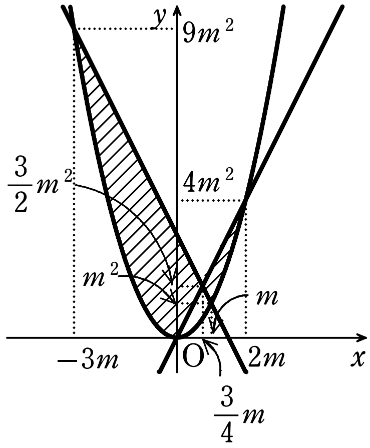
関西医科大学対策　記述演習

1 解答　(1)　$(-3m,\ 9m^2)$，$(m,\ m^2)$

(2)　[図] 境界線を含む。

(3)　最大値 $18m^2+3m$，最小値 0

(4)　最大値 $36m^2$，最小値 $-\dfrac{9}{2}m^2$



(1)　$y=x^2$　……①，　$y=-2mx+3m^2$　……②

①，② から y を消去して　$x^2=-2mx+3m^2$

整理すると　$x^2+2mx-3m^2=0$　　ゆえに　$(x+3m)(x-m)=0$

よって　$x=-3m,\ m$

したがって，①，② のグラフの共有点の座標は　$(-3m,\ 9m^2)$，$(m,\ m^2)$

(2)　$y=2mx$　……③

①，③ から y を消去して　$x^2=2mx$　　整理すると　$x(x-2m)=0$

よって　$x=0,\ 2m$

したがって，①，③ のグラフの共有点の座標は　$(0,\ 0)$，$(2m,\ 4m^2)$

また，②，③ から y を消去して　$-2mx+3m^2=2mx$

整理すると　$4mx=3m^2$　　$m\neq 0$ であるから　$x=\dfrac{3}{4}m$

したがって，②，③ のグラフの共有点の座標は

$$\left(\frac{3}{4}m,\ \frac{3}{2}m^2\right)$$

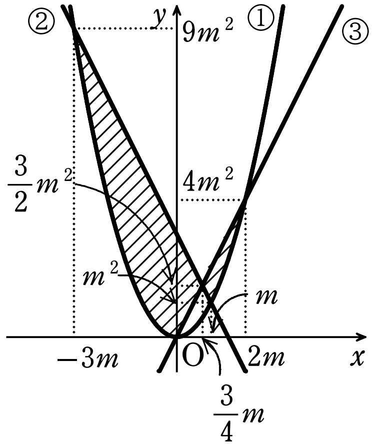
更に，$(y-2mx)(y+2mx-3m^2)\leqq 0$ から

$$\begin{cases} y-2mx\geqq 0 \\ y+2mx-3m^2\leqq 0 \end{cases}$$

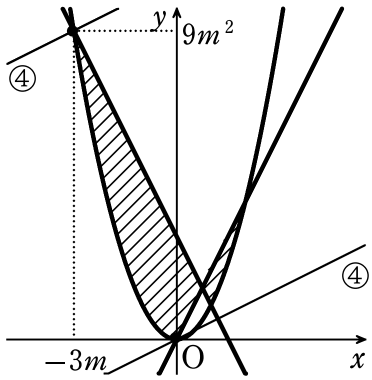
または　$$\begin{cases} y-2mx\leqq 0 \\ y+2mx-3m^2\geqq 0 \end{cases}$$

$m>1$ であることに注意すると，求める領域 D は右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。



(3)　$2y-x=k$　…… ④ とおくと，④ は傾き $\dfrac{1}{2}$，



y 切片 $\dfrac{k}{2}$ の直線を表す。

k の値が最大となるのは，図から，直線 ④ が点 $(-3m,\ 9m^2)$ を通るときである。

このとき，④ より，k の値は

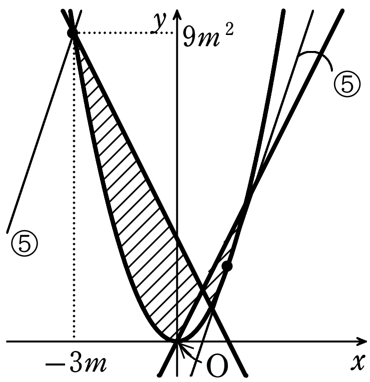
$$k=2\cdot 9m^2-(-3m)=18m^2+3m$$

また，点 $(0,\ 0)$ と点 $(m,\ m^2)$ を通る直線の傾きは m で，$m>\dfrac{1}{2}$ であるから，k の値が最小となるのは，図から，直線 ④ が点 $(0,\ 0)$ を通るときである。

このとき，④ より，k の値は　　$k=2\cdot 0-0=0$

以上より，$2y-x$ の最大値は $18m^2+3m$，最小値は 0

(4)　$2y-6mx=l$　…… ⑤ とおくと，⑤ は傾き $3m$ (>3)，y 切片 $\dfrac{l}{2}$ の直線を表す。



l の値が最大となるのは，図から，直線 ⑤ が点 $(-3m,\ 9m^2)$ を通るときである。

このとき，⑤ より，l の値は

$$l=2\cdot 9m^2-6m\cdot(-3m)=36m^2$$

また，$y=x^2$ に対して　　$y'=2x$

よって，$y'=3m$ を満たす x は　　$x=\dfrac{3}{2}m$

ゆえに，点 $\left(\dfrac{3}{2}m,\ \dfrac{9}{4}m^2\right)$ において接線の傾きが $3m$ となり，この点 $\left(\dfrac{3}{2}m,\ \dfrac{9}{4}m^2\right)$ は領域 D に含まれる。

したがって，l の値が最小となるのは，直線 ⑤ が点 $\left(\dfrac{3}{2}m,\ \dfrac{9}{4}m^2\right)$ を通るときであるから，⑤ より，l の値は　　$l=2\cdot\dfrac{9}{4}m^2-6m\cdot\dfrac{3}{2}m=-\dfrac{9}{2}m^2$

以上より，$2y-6mx$ の最大値は $36m^2$，最小値は $-\dfrac{9}{2}m^2$

$\boxed{2}$ 解答　(1)　略　　(2)　$y=\dfrac{1}{2}x$　　(3)　$V=\left\{\log(\sqrt{2}+1)-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right\}\pi$　　(4)　$S=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$

(1)　$f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ から，$x>1$ のとき

$$f'(x)=\frac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot x-\sqrt{x^2-1}\cdot 1}{x^2}=\frac{x^2-(x^2-1)}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}},$$

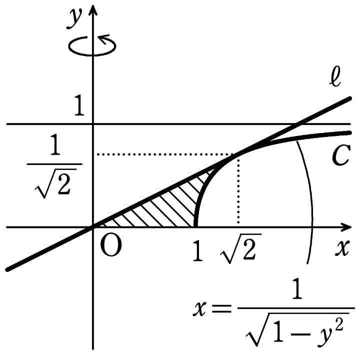
$$f''(x)=\frac{-\left\{2x\cdot\sqrt{x^2-1}+x^2\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right\}}{x^4(x^2-1)}=-\frac{2x(x^2-1)+x^3}{x^4(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{x(3x^2-2)}{x^4(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

よって，$x>1$ において　　$f'(x)>0$，　$f''(x)<0$

ゆえに，区間 $x>1$ で，$f(x)$ は増加し，曲線 C は上に凸である。

(2)　$f(\sqrt{2})=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$f'(\sqrt{2})=\dfrac{1}{2}$ であるから， 曲線 C の点 $(\sqrt{2}，f(\sqrt{2}))$ における接線 ℓ の方程式は　　$y-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}(x-\sqrt{2})$　　　すなわち　　$y=\dfrac{1}{2}x$

(3)　(1)，(2) より，D は右の図の斜線部分のようになる。



ここで，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=1$ より，

関数 $y=f(x)$ $(x\geqq 1)$ の値域は　　$0\leqq y<1$

このとき，$y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ から　　$xy=\sqrt{x^2-1}$

両辺を 2 乗して整理すると　　$x^2(1-y^2)=1$

$x\geqq 1$，$0\leqq y<1$ であるから　　$x=\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

したがって，求める体積 V は

$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right)^2dy-\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot(\sqrt{2})^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1-y}\right)\right\}dy-\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[\log|1+y|-\log|1-y|\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}-\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$$

$$=\frac{\pi}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$$

$$=\frac{\pi}{2}\log(\sqrt{2}+1)^2-\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$$

$$=\left\{\log(\sqrt{2}+1)-\frac{\sqrt{2}}{3}\right\}\pi$$

(4)　求める D の面積 S は　　$S=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}$

ここで，$y=\sin\theta$ とおくと　　$dy=\cos\theta\,d\theta$

y と θ の対応は右のようになる。

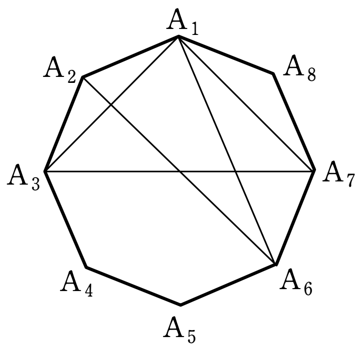
y	$0\to\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
θ	$0\to\dfrac{\pi}{4}$

よって　　$S=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}d\theta-\frac{1}{2}$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta-\frac{1}{2}=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

$\boxed{3}$ 解答　(1)　$N_4=6$　　(2)　$N_n=\dfrac{1}{2}n(n-1)$　　(3)　$P_n=\dfrac{n-2}{4n-2}$　　(4)　$\dfrac{1}{4}$

(1)　$\angle \mathrm{A}_i\mathrm{A}_1\mathrm{A}_j\,(1<i<j)$ は i を固定したとき，j が増えるほど大きくなる。



$\angle \mathrm{A}_2\mathrm{A}_1\mathrm{A}_j\,(2<j)$ が 90° 以上となる最小の j は　　$j=6$

(このとき，$\angle \mathrm{A}_2\mathrm{A}_1\mathrm{A}_6=90^\circ$)

よって，$\angle \mathrm{A}_2\mathrm{A}_1\mathrm{A}_j\,(2<j)$ が 90° 以上となる j は，

$j=6$，7，8 の　　3 個

$\angle \mathrm{A}_3\mathrm{A}_1\mathrm{A}_j\,(3<j)$ が 90° 以上となる最小の j は　　$j=7$

よって，$\angle \mathrm{A}_3\mathrm{A}_1\mathrm{A}_j\,(3<j)$ が 90° 以上となる j は，

$j=7$，8 の　　2 個

同様に考えて，$\angle \mathrm{A}_4\mathrm{A}_1\mathrm{A}_j\,(4<j)$ が 90° 以上となる j は，$j=8$ の　　1 個

また，$i\geqq5$ のとき，$\angle \mathrm{A}_i\mathrm{A}_1\mathrm{A}_j\,(i<j)$ が 90° 以上となることはない。

したがって　　$N_4=3+2+1=6$

(2)　(1) と同様に考えると，$\angle \mathrm{A}_2\mathrm{A}_1\mathrm{A}_j\,(2<j)$ が 90° 以上となる最小の j は　　$j=n+2$

よって，$\angle \mathrm{A}_2\mathrm{A}_1\mathrm{A}_j\,(2<j)$ が 90° 以上となる j は，$j=n+2$，$n+3$，……，$2n$ の

$n-1$ 個

同様に，i を $2\leqq i\leqq n$ の範囲で固定したとき $\angle \mathrm{A}_i\mathrm{A}_1\mathrm{A}_j\,(i<j)$ が 90° 以上となる j は，

$j=n+i$，$n+i+1$，……，$2n$ の　　$n-i+1$ 個

また，$i\geqq n+1$ のとき，$\angle \mathrm{A}_i\mathrm{A}_1\mathrm{A}_j\,(i<j)$ が 90° 以上となることはない。

したがって　　$N_n=\displaystyle\sum_{i=2}^{n}(n-i+1)=(n-1)+(n-2)+\cdots\cdots+1=\sum_{i=1}^{n-1}i=\frac{1}{2}n(n-1)$

(3)　3 点を選んでできる三角形の総数は　　${}_{2n}\mathrm{C}_3$ 個

そのうち，$\angle \mathrm{A}_1\geqq90^\circ$ となる三角形は，(2) から　　$\dfrac{1}{2}n(n-1)$ 個

同様に，$i=2$，3，……，$2n$ について，$\angle \mathrm{A}_i\geqq90^\circ$ となる三角形は　　$\dfrac{1}{2}n(n-1)$ 個

よって，鋭角三角形でないものの個数は　$2n\cdot\dfrac{1}{2}n(n-1)=n^2(n-1)$ (個)

ゆえに，三角形が鋭角三角形となる確率 P_n は

$$P_n=1-\frac{n^2(n-1)}{{}_{2n}\mathrm{C}_3}=1-n^2(n-1)\cdot\frac{6}{2n(2n-1)(2n-2)}$$

$$=1-\frac{3n}{2(2n-1)}=\frac{n-2}{4n-2}$$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{4n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{2}{n}}{4-\dfrac{2}{n}}=\frac{1}{4}$