$\boxed{1}$

(1)

解答　(前半)　$a<-2$　　(後半)　$-4 \leqq a \leqq 4$

(2)

解答　(ア)　9　　(イ)　40　　(ウ)　10

(3)

解答　(ア)　$\dfrac{4}{3}$　　(イ)　$3a_n-2a_{n-1}=4$　　(ウ)　$4\left\{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}$　　(エ)　27

(4)

解答　(ア)　$2\sqrt{2}$　　(イ)　$-\dfrac{1}{3}$

(5)

解答　(ア)　9　　(イ)　-3

解説

(1) $f(x)=|1-x|-2$ とおく。

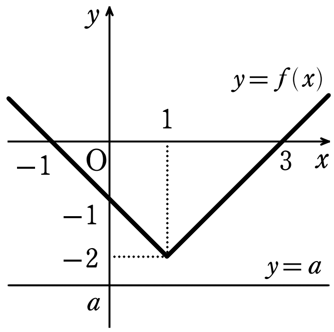
$1-x \geqq 0$ すなわち $x \leqq 1$ のとき

$$f(x)=(1-x)-2=-x-1$$

$1-x<0$ すなわち $x>1$ のとき

$$f(x)=-(1-x)-2=x-3$$

方程式 $f(x)=a$ が解をもたないような a の値の範囲は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ が共有点をもたない a の値の範囲と等しい。



よって，図より　　$a<-2$

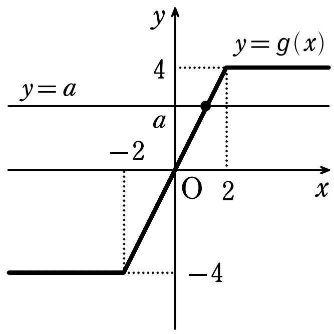
また，$g(x)=|x+2|-|x-2|$ とおく。

$x<-2$ のとき　　$g(x)=-(x+2)+(x-2)=-4$

$-2 \leqq x<2$ のとき　　$g(x)=(x+2)+(x-2)=2x$

$x \geqq 2$ のとき　　$g(x)=(x+2)-(x-2)=4$

方程式 $g(x)=a$ が解をもつような a の値の範囲は，$y=g(x)$ のグラフと直線 $y=a$ が共有点をもつ a の値の範囲と等しい。



よって，図より　　$-4 \leqq a \leqq 4$

(2) $\dfrac{4}{x}+\dfrac{9}{y}=1$ から　　$4y+9x=xy$

よって　　$(x-4)(y-9)=36$　…… ①

また，$x>0$，$y>0$ から　　$x-4>-4$，$y-9>-9$　…… ②

①，② を満たす整数 $x-4$，$y-9$ の組は

$(x-4,\ y-9)=(1,\ 36),\ (2,\ 18),\ (3,\ 12),\ (4,\ 9),\ (6,\ 6),\ (9,\ 4),\ (12,\ 3),$
$(18,\ 2),\ (36,\ 1)$

よって，① を満たす正の整数の組 $(x,\ y)$ は ア9 組ある。

このうち，xが最大のものは$(x-4,\ y-9)=(36,\ 1)$の組であり，このとき

$$(x,\ y)=({}^{イ}40,\ {}^{ウ}10)$$

(3) $2a_n+S_n=4n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$　　$\cdots\cdots$ ①

$n=1$ のとき　　$2a_1+S_1=4$

$S_1=a_1$ であるから　　$2a_1+a_1=4$　　　これを解いて　　$a_1={}^{ア}\dfrac{4}{3}$

① より $n\geqq2$ のとき　　$2a_{n-1}+S_{n-1}=4(n-1)$　　$\cdots\cdots$ ②

①−② から　　$2(a_n-a_{n-1})+(S_n-S_{n-1})=4\{n-(n-1)\}$

$n\geqq2$ のとき $a_n=S_n-S_{n-1}$ であるから

$$2(a_n-a_{n-1})+a_n=4\qquad よって\qquad {}^{イ}3a_n-2a_{n-1}=4$$

したがって　　$3a_{n+1}-2a_n=4\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

これを変形すると　　$a_{n+1}-4=\dfrac{2}{3}(a_n-4)$

また　　$a_1-4=\dfrac{4}{3}-4=-\dfrac{8}{3}$

ゆえに，数列$\{a_n-4\}$は初項$-\dfrac{8}{3}$，公比$\dfrac{2}{3}$の等比数列であるから

$$a_n-4=-\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\qquad よって\qquad a_n={}^{ウ}4\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

これと ① により　　$S_n=4n-2a_n=4n-8\left\{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}$

$S_n\geqq100$ とすると　　$4n-8\left\{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}\geqq100$

したがって　　$n\geqq27-2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

$n\geqq2$ のとき $0<2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n<1$ であるから，$S_n\geqq100$ となる最小の n は　${}^{エ}27$

(4) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき　　$\tan x>0$

よって，相加平均・相乗平均の関係により

$$y=\tan x+\frac{2}{\tan x}\geqq2\sqrt{\tan x\cdot\frac{2}{\tan x}}=2\sqrt{2}$$

等号は$\tan x=\dfrac{2}{\tan x}$　すなわち　$\tan x=\sqrt{2}$ のとき成り立つ。

よって，$y=\tan x+\dfrac{2}{\tan x}$ の最小値は　　${}^{ア}2\sqrt{2}$

また，$\tan\alpha=\sqrt{2}$ であるから　　$\cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{1}{3}$

ゆえに　　$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\cdot\dfrac{1}{3}-1={}^{イ}-\dfrac{1}{3}$

(5) 真数は正であるから　　$y-3x>0,\ x>0,\ y>0$　$\cdots\cdots$ ①

$2\log_2(y-3x)=2+\log_2x+\log_2y$ から　　$\log_2(y-3x)^2=\log_24+\log_2x+\log_2y$

すなわち　$\log_2(y-3x)^2=\log_2 4xy$　　よって　$(y-3x)^2=4xy$

左辺を展開して整理すると　$y^2-10xy+9x^2=0$　すなわち　$(y-x)(y-9x)=0$

① より，$y>3x>x$ であるから　$y=9x$　　したがって　$\dfrac{y}{x}=^{ア}9$

また，このとき

$$\log_2\frac{xy-6x^2}{y^2-5xy-12x^2}=\log_2\frac{\frac{y}{x}-6}{\left(\frac{y}{x}\right)^2-5\cdot\frac{y}{x}-12}=\log_2\frac{9-6}{9^2-5\cdot 9-12}$$

$$=\log_2\frac{1}{8}=\log_2 2^{-3}=^{イ}-3$$

$\boxed{2}$

解答　(1)　(ア)　$\dfrac{2}{\cos\theta}$　　(2)　(イ)　$\dfrac{1-x}{\sqrt{3+x^2}}$　　(3)　(ウ)　$\dfrac{1}{2}\log 3-2+\sqrt{3}$

(4)　(エ)　-1　　(オ)　$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

解説

(1)　$$\frac{d}{d\theta}\log\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)=\frac{d}{d\theta}\{\log(1+\sin\theta)-\log(1-\sin\theta)\}$$

$$=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta\{(1-\sin\theta)+(1+\sin\theta)\}}{1-\sin^2\theta}$$

$$=^{ア}\frac{2}{\cos\theta}$$

(2)　$$\frac{n-1}{n\sqrt{3n^2+1^2}}+\frac{n-2}{n\sqrt{3n^2+2^2}}+\frac{n-3}{n\sqrt{3n^2+3^2}}+\cdots\cdots+\frac{n-n}{n\sqrt{3n^2+n^2}}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n-k}{\sqrt{3n^2+k^2}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\frac{k}{n}}{\sqrt{3+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

よって　$f(x)=^{イ}\dfrac{1-x}{\sqrt{3+x^2}}$

(3)　$\alpha=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{1-x}{\sqrt{3+x^2}}dx$

$x=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\dfrac{\pi}{6}$

よって　$$\alpha=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-\sqrt{3}\tan\theta}{\sqrt{3+3\tan^2\theta}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-\sqrt{3}\tan\theta}{\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\cos\theta}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-\sqrt{3}\tan\theta}{\cos\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\theta}{\cos\theta}-\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta$$

(1) より，　$\displaystyle\int\frac{d\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)+C$ (C は積分定数) であるから

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}\log 3$$

また　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta=\left[\frac{1}{\cos\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{2}{\sqrt{3}}-1$

よって　$\displaystyle\alpha=\frac{1}{2}\log 3-\sqrt{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)={}^{ウ}\frac{1}{2}\log 3-2+\sqrt{3}$

(4)　$\displaystyle f(x)=\frac{1-x}{\sqrt{3+x^2}}$ から

$$f'(x)=\frac{-\sqrt{3+x^2}-(1-x)\dfrac{2x}{2\sqrt{3+x^2}}}{3+x^2}=\frac{-x-3}{(3+x^2)\sqrt{3+x^2}}$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-3$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$

また　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}-1}{\sqrt{\dfrac{3}{x^2}+1}}=-1$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{1}{x}-1}{-\sqrt{\dfrac{3}{x^2}+1}}=1$$

ゆえに，$f(x)$ のとりうる値の範囲は　${}^{エ}-1<f(x)\leqq{}^{オ}\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

3

解答　(1)　(ア)　2　(イ)　3　(ウ)　7　(2)　(エ)　2　(オ)　1
(3)　(カ)　7　(キ)　19　(ク)　54

解説

(1)　$4\leqq 5<9$，$9\leqq 10<16$，$49\leqq 50<64$ から

$$2\leqq\sqrt{5}<3,\ 3\leqq\sqrt{10}<4,\ 7\leqq\sqrt{50}<8$$

よって　$a_5={}^{ア}2$，$a_{10}={}^{イ}3$，$a_{50}={}^{ウ}7$

(2)　$a_n=m$ から　$m\leqq\sqrt{n}<m+1$

各辺を 2 乗して　$m^2\leqq n<m^2+2m+1$

この条件を満たす自然数 n は　m^2，m^2+1，m^2+2，……，m^2+2m

よって，$a_n=m$ となる a_n の個数は　${}^{エ}2m+{}^{オ}1$ 個

(3)　(2) から，a_1 から a_{20} までのうち，

$a_n=1$ となる a_n の個数は　3 個　($a_1\sim a_3$)

$a_n=2$ となる a_n の個数は　5 個　($a_4\sim a_8$)

$a_n=3$ となる a_n の個数は　7 個　($a_9\sim a_{15}$)

$a_n=4$ となる a_n の個数は　5個　$(a_{16} \sim a_{20})$

よって　$b_5=(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5)=1\cdot3+2\cdot2={}^{カ}7$

$b_{10}=(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6+a_7+a_8)+(a_9+a_{10})$

$=1\cdot3+2\cdot5+3\cdot2={}^{キ}19$

$b_{20}=1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+4\cdot5={}^{ク}54$

$\boxed{4}$

$\boxed{解答}$　(1)　$t=\dfrac{1}{1-z_0}$　　(2)　$\mathrm{Q}\left(\dfrac{x_0}{1-z_0},\ \dfrac{y_0}{1-z_0},\ 0\right)$

(3)　原点を中心とする半径 $\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}}$ である xy 平面上の円

(解説)

(1)　点Qが xy 平面上にあるとすると，$\mathrm{Q}(x,\ y,\ 0)$ と表せる。

$\overrightarrow{\mathrm{NQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{NP}}$ から　$(x,\ y,\ -1)=t(x_0,\ y_0,\ z_0-1)$

ゆえに　$x=x_0t,\ y=y_0t,\ -1=(z_0-1)t$

$(x_0,\ y_0,\ z_0)\neq(0,\ 0,\ 1)$ から　$z_0\neq1$

よって　$t=\dfrac{1}{1-z_0}$

(2)　(1) より　$x=\dfrac{x_0}{1-z_0},\ y=\dfrac{y_0}{1-z_0}$ となるから

$$\mathrm{Q}\left(\frac{x_0}{1-z_0},\ \frac{y_0}{1-z_0},\ 0\right)$$

(3)　球面 S の方程式は $x^2+y^2+z^2=1$ である。

点Pが C 上にあるから

$$x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2=1 \quad かつ \quad z_0=a$$

ゆえに　$x_0{}^2+y_0{}^2=1-a^2$　かつ　$z_0=a$

よって，(2) から $\mathrm{Q}(x,\ y,\ 0)$ に対して

$$x=\frac{x_0}{1-z_0}=\frac{x_0}{1-a},\quad y=\frac{y_0}{1-z_0}=\frac{y_0}{1-a}$$

ゆえに　$x_0=(1-a)x,\ y_0=(1-a)y$

$x_0{}^2+y_0{}^2=1-a^2$ であるから

$$(1-a)^2x^2+(1-a)^2y^2=1-a^2$$

よって，$0<a<1$ から

$$x^2+y^2=\frac{1+a}{1-a}$$

したがって，点Qの軌跡は，原点を中心とする半径 $\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}}$ である xy 平面上の円である。