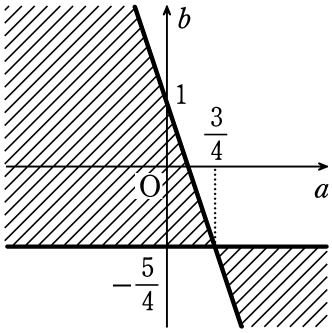
第3回　大阪医科薬科大学実践演習

$\boxed{1}$

解答　[図] 境界線を含む。



$y=(b-a)x-(3b+a)$ ……① とする。

直線①が線分ABと共有点をもつから，次の[1]，[2]のいずれかが成り立つ。

[1]　直線①で分けられる2つの領域の一方に点Aがあり，他方に点Bがある。

[2]　点Aまたは点Bが直線①上にある。

よって，$f(x,\ y)=(b-a)x-(3b+a)-y$ とすると，

[1]のとき　　$f(-1,\ 5)\cdot f(2,\ -1)<0$

[2]のとき　　$f(-1,\ 5)=0$ または $f(2,\ -1)=0$

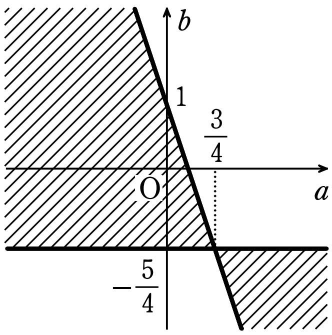
[1]，[2]を合わせて　　$f(-1,\ 5)\cdot f(2,\ -1)\leqq 0$

すなわち　　$(-4b-5)(-3a-b+1)\leqq 0$

よって　　$(4b+5)(3a+b-1)\leqq 0$

ゆえに　　$\begin{cases}4b+5\geqq 0\\3a+b-1\leqq 0\end{cases}$　または　$\begin{cases}4b+5\leqq 0\\3a+b-1\geqq 0\end{cases}$

したがって　$\begin{cases}b\geqq -\dfrac{5}{4}\\b\leqq -3a+1\end{cases}$　または　$\begin{cases}b\leqq -\dfrac{5}{4}\\b\geqq -3a+1\end{cases}$



これを満たす点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の存在する領域は，右の図の斜線部分のようになる。

ただし，境界線を含む。

$\boxed{2}$

解答　(1)　略　　(2)　証明略；等号成立は $A=B$ のとき　　(3)　$A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$

(1)　$\dfrac{A+B}{2}=\alpha$，$\dfrac{A-B}{2}=\beta$ とおくと

$$(\text{右辺})=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=2\cos\alpha\cos\beta$$

一方，$\dfrac{A+B}{2}=\alpha$，$\dfrac{A-B}{2}=\beta$ から　　$A=\alpha+\beta$，$B=\alpha-\beta$

よって　　$(\text{左辺})=\cos A+\cos B=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$

$$=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$$

$$=2\cos\alpha\cos\beta$$

したがって，(左辺)＝(右辺) が成り立つ。

(2)　$A+B+C=\pi$ から　　$A+B=\pi-C$

よって，(1) より　　$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

ここで，$0<\frac{C}{2}<\frac{\pi}{2}$ であるから　　$\sin\frac{C}{2}>0$

これと，$\cos\frac{A-B}{2}\leqq 1$ より　　$2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}\leqq 2\sin\frac{C}{2}$

したがって　　$\cos A+\cos B\leqq 2\sin\frac{C}{2}$

等号は，$\cos\frac{A-B}{2}=1$ すなわち $A=B$ のとき成り立つ。

(3)　(2) の結果より　　$\cos A+\cos B+\cos C\leqq 2\sin\frac{C}{2}+\cos C$

等号は，$A=B$ のとき成り立つ。

$A=B$ の条件のもとで　　$2\sin\frac{C}{2}+\cos C=2\sin\frac{C}{2}+\left(1-2\sin^2\frac{C}{2}\right)$

$$=-2\sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{C}{2}+1$$

$$=-2\left(\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$$

ここで，$0<\frac{C}{2}<\frac{\pi}{2}$ であるから　　$0<\sin\frac{C}{2}<1$

ゆえに，$2\sin\frac{C}{2}+\cos C$ は $\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$ のとき，最大値 $\frac{3}{2}$ をとる。

$\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$ のとき，$\frac{C}{2}=\frac{\pi}{6}$ であるから　　$C=\frac{\pi}{3}$

$A+B=\pi-C$ かつ $A=B$ であるから　　$A=B=\frac{\pi}{3}$

したがって，$\cos A+\cos B+\cos C$ が最大となるとき　　$A=B=C=\frac{\pi}{3}$

$\boxed{3}$

$\boxed{\text{解答}}$　(1)　略　　(2)　$b=\frac{\pi}{2}$，$m:y=x-\pi$　　(3)　$V=\frac{13}{48}\pi^4-\frac{\pi^2}{8}$

(1)　$f'(x)=-\sin x-x\cos x$

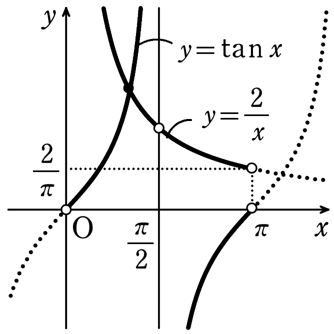
$f''(x)=-\cos x-\cos x-x(-\sin x)=x\sin x-2\cos x$

$f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\neq 0$ であるから，$x=\frac{\pi}{2}$ は方程式 $f''(x)=0$ の解ではない。

$0<x<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}<x<\pi$ ……① のとき，$f''(x)=0$ から　　$x\sin x=2\cos x$

$x \neq 0$，$\cos x \neq 0$ であるから　　$\tan x = \dfrac{2}{x}$

① の範囲における関数 $y=\tan x$，$y=\dfrac{2}{x}$ のグラフは右の図の実線部分のようになり，ただ 1 つの共有点をもつ。よって，$0<x<\pi$ の範囲で方程式 $f''(x)=0$ はただ 1 つの解 $x=a$ をもつ。



(2)　(1) の図から　　$0<a<\dfrac{\pi}{2}$

[1]　$a<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，(1) の図から　　$\tan x > \dfrac{2}{x}$

この式を変形すると　　$x\sin x - 2\cos x > 0$　　すなわち　　$f''(x)>0$

[2]　$x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき　　$f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}>0$

[3]　$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ のとき　　$\cos x<0$

よって　　$f''(x)=x\sin x-\cos x > x\sin x > 0$

[1]～[3] から，$a<x<\pi$ のとき　　$f''(x)>0$

ゆえに，$a<x<\pi$ の範囲で $f'(x)$ は単調に増加する。

また　　$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$

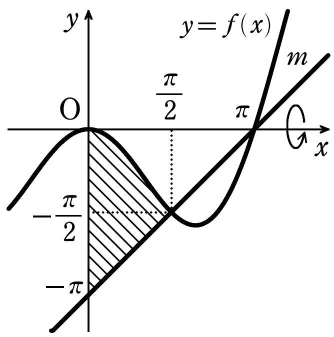
したがって，$a<x<\pi$ の範囲で方程式 $f'(x)=-1$ はただ 1 つの解 $x=\dfrac{\pi}{2}$ をもつ。

すなわち　$b=\dfrac{\pi}{2}$

また，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ であるから，法線 m の方程式は　　$y-\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=1\cdot\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

すなわち　　$y=x-\pi$　……②

(3)　$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$f(x) \leqq 0$ であることと，② の結果から，求める回転体の体積 V は



$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-\pi)^2dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-x\sin x)^2dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-\pi)^2dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-\pi)^2dx-\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx+\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos 2x\,dx$$

ここで

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-\pi)^2dx=\left[\frac{(x-\pi)^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}\left(-\frac{\pi^3}{8}+\pi^3\right)=\frac{7}{24}\pi^3$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{24}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)'dx$$

$$=\left[x^2\cdot\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\cos 2x}{2}\right)'dx$$

$$=\left[x\cdot\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{2}dx$$

$$=-\frac{\pi}{4}-\left[\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi}{4}$$

よって　　$V=\pi\cdot\frac{7}{24}\pi^3-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi^3}{24}+\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{13}{48}\pi^4-\frac{\pi^2}{8}$

$\boxed{4}$

解答　略

数列 $\{a_n\}$ がすべての正の整数 n に対して

$$0\leqq 3a_n\leqq\sum_{k=1}^{n}a_k \quad \cdots\cdots ①$$

を満たしているとき，すべての n に対して

$$a_n=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

であることを数学的帰納法で証明する。

[1]　$n=1$ のとき

① において $n=1$ とすると

$0\leqq 3a_1\leqq a_1$

すなわち　　$0\leqq 3a_1$ かつ $3a_1\leqq a_1$

$0\leqq a_1$ かつ $a_1\leqq 0$

よって　　$a_1=0$

したがって，② は $n=1$ のとき成り立つ。

[2]　$n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ l$ のとき ② が成り立つ，すなわち

$$a_1=a_2=\cdots\cdots=a_l=0 \qquad \cdots\cdots ③$$

であると仮定する。

$n=l+1$ のときを考えると，① から

$$0\leqq 3a_{l+1}\leqq\sum_{k=1}^{l+1}a_k$$

すなわち　　$0\leqq 3a_{l+1}\leqq a_1+a_2+\cdots\cdots+a_l+a_{l+1}$

これと ③ から　　$0\leqq 3a_{l+1}\leqq a_{l+1}$

よって　　$a_{l+1}=0$

したがって，② は $n=l+1$ のときも成り立つ。

[1]，[2] から，② はすべての正の整数 n に対して成り立つ。

$\boxed{5}$

解答　(1)　$\sqrt{6}$　　(2)　$\sqrt{6}$

(1)　O を座標空間の原点とし，A $(a,\ 0,\ 0)$，B $(0,\ b,\ 0)$，C $(0,\ 0,\ c)$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$ とおいて考える。

このとき　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(a,\ -b,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(0,\ -b,\ c)$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=\sqrt{a^2+(-b)^2+0^2}=\sqrt{a^2+b^2}$

$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{0^2+(-b)^2+c^2}=\sqrt{b^2+c^2}$

ゆえに　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2+c^2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2+c^2}$

$\triangle\mathrm{ABC}=3\sqrt{3}$ から　$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2+c^2}=3\sqrt{3}$

よって　$\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2+c^2}=12$　…… ①

また　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=a\cdot 0+(-b)\cdot(-b)+0\cdot c=b^2$

一方　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|\cos 60^\circ=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2+c^2}\cdot\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2+c^2}=b^2$

よって　$\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2+c^2}=2b^2$　…… ②

①，② から　$2b^2=12$　すなわち　$b^2=6$

$b>0$ であるから　$b=\sqrt{6}$　したがって　$\mathrm{OB}=\sqrt{6}$

(2)　四面体 OABC の体積を V とすると

$V=\dfrac{1}{3}\times\triangle\mathrm{OAB}\times\mathrm{OC}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}ab\times c=\dfrac{1}{6}abc$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{6}ac$

$b=\sqrt{6}$ を ① に代入して　$\sqrt{a^2+6}\sqrt{6+c^2}=12$

両辺を 2 乗して整理すると　$6a^2+6c^2+a^2c^2=108$

よって　$6(a-c)^2+12ac+a^2c^2=108$

$a^2c^2+12ac-108=-6(a-c)^2\leqq 0$

$(ac+18)(ac-6)\leqq 0$

$-18\leqq ac\leqq 6$

$a>0,\ c>0$ であるから　$0<ac\leqq 6$

$ac=6$ となるとき，$(a-c)^2=0$ すなわち $a=c$ であるから，$a=c=\sqrt{6}$ となる。

したがって，ac の最大値は 6 であるから，$V=\dfrac{\sqrt{6}}{6}ac$ の最大値は　$\dfrac{\sqrt{6}}{6}\cdot 6=\sqrt{6}$