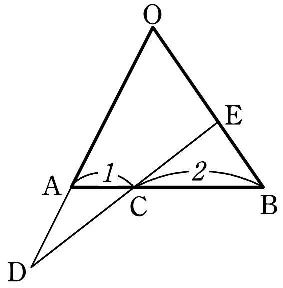
$\boxed{1}$ 解答 (1) 略　(2) $x=\dfrac{4}{3}$ のとき最大値 $\dfrac{9}{8}$



(1) Cは辺ABを1：2に内分するから

$$\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$$

また，Cは直線DE上にあるから，DC：CE$=t:s$ とすると

$$s+t=1 \quad \cdots\cdots ① \quad かつ$$

$$\overrightarrow{OC}=s\overrightarrow{OD}+t\overrightarrow{OE}=sx\overrightarrow{OA}+ty\overrightarrow{OB}$$

$\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OB}\neq\vec{0}$ で，$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ は平行でないから

$$sx=\frac{2}{3},\ ty=\frac{1}{3} \quad すなわち \quad s=\frac{2}{3x},\ t=\frac{1}{3y}$$

① に代入すると　$\dfrac{2}{3x}+\dfrac{1}{3y}=1$

したがって　$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=3$

別解　$x>1$ のとき，メネラウスの定理により

$$\frac{OD}{DA}\cdot\frac{AC}{CB}\cdot\frac{BE}{EO}=1 \quad すなわち \quad \frac{x}{x-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1-y}{y}=1$$

よって，$\dfrac{1-y}{y}=\dfrac{2x-2}{x}$ であり　$\dfrac{1}{y}-1=2-\dfrac{2}{x}$

したがって　$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=3 \quad \cdots\cdots(*)$

$x=1$ のときは，DはAと一致し，EはBと一致するから $y=1$ となる。

よって，$x\geqq 1$ で $(*)$ が成り立つ。

(2) $\angle AOB=\theta$ とすると

$$S=\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin\theta,\quad T=\frac{1}{2}OD\cdot OE\sin\theta$$

よって　$\dfrac{S}{T}=\dfrac{OA\cdot OB}{OD\cdot OE}=\dfrac{OA\cdot OB}{x\,OA\cdot y\,OB}=\dfrac{1}{xy}$

また，$\dfrac{2}{x}>0$，$\dfrac{1}{y}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$3=\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\geqq 2\sqrt{\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{y}}=2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{xy}}$$

よって　$2\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{xy}}\leqq 3$

ゆえに　$\dfrac{1}{xy}\leqq\dfrac{9}{8}$　すなわち　$\dfrac{S}{T}\leqq\dfrac{9}{8}$

等号は，$\dfrac{2}{x}=\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2}$ すなわち $x=\dfrac{4}{3}$，$y=\dfrac{2}{3}$ のとき成り立つ。これは $x\geqq 1$ を満たす。

したがって，$\dfrac{S}{T}$ は $x=\dfrac{4}{3}$ のとき最大値 $\dfrac{9}{8}$ をとる。

$\boxed{2}$ 解答 (1) $x+y=1$ (2) $4x+8y=5$ (3) $0<a<\sqrt{3}$，b の最小値は 1

(1) 円 C' は半径 1 の円で中心が第 1 象限にあり，x 軸と y 軸に接するから，その方程式は $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

よって，直線 PQ の方程式は

$$x^2+y^2-1+k\{(x-1)^2+(y-1)^2-1\}=0$$

で $k=-1$ としたものであるから

$$x+y=1$$

(2) 円 C' の方程式は $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=1$

よって，直線 PQ の方程式は

$$x^2+y^2-1-\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2-1\right\}=0$$

すなわち $4x+8y=5$

(3) [1] C' の中心が第 1 象限にあるとき

円 C' の方程式は $(x-a)^2+(y-1)^2=1$

よって，C と C' の中心間の距離は $\sqrt{a^2+1}$

C と C' は異なる 2 点で交わるから $\sqrt{a^2+1}<2$

$a>0$ であるから $0<a<\sqrt{3}$ …… ①

また，直線 PQ の方程式は

$$x^2+y^2-1-\{(x-a)^2+(y-1)^2-1\}=0$$

すなわち $2ax+2y-a^2-1=0$

これが点 R $(b,\ 0)$ を通るから $2ab-a^2-1=0$

よって $b=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$

ここで，相加平均・相乗平均の関係から $a+\frac{1}{a}\geqq 2$

等号は $a=1$ のとき成り立つ。$a=1$ は ① を満たす。

したがって $0<a<\sqrt{3}$，b の最小値は 1

[2] C' の中心が第 4 象限にあるとき

[1] と同様にして $0<a<\sqrt{3}$，b の最小値は 1

[1]，[2] から $0<a<\sqrt{3}$，b の最小値は 1

$\boxed{3}$ 解答 (1) R_x，R_y の面積はともに $2\sqrt{2-t^2}$，

R_x と R_y の共通部分の面積は

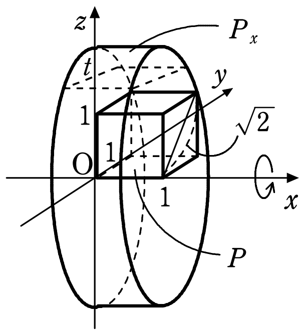
$0\leqq|t|\leqq 1$ のとき 1，$1\leqq|t|\leqq\sqrt{2}$ のとき $2-t^2$

(2) $0\leqq|t|\leqq 1$ のとき $S(t)=4\sqrt{2-t^2}-1$，

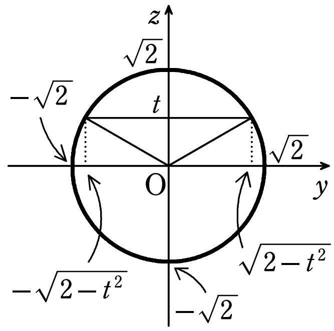
$1\leqq|t|\leqq\sqrt{2}$ のとき $S(t)=4\sqrt{2-t^2}+t^2-2$

(3) $4\pi+\frac{4}{3}-\frac{8\sqrt{2}}{3}$

(1)　P を x 軸の周りに 1 回転してできる立体 P_x は，右の図のように，底面が半径 $\sqrt{2}$ の円，高さが 1 の円柱である。



同様に，P を y 軸の周りに 1 回転してできる立体 P_y も，底面が半径 $\sqrt{2}$ の円，高さが 1 の円柱となる。
ただし，円柱 P_y の底面は y 軸と垂直である。
P_x は底面が x 軸に垂直な円柱であるから，P_x を x 軸に垂直な平面で切ると，その切り口は，常に右の図のような半径 $\sqrt{2}$ の円である。



P_x と平面 $z=t$ が交わっているとき

$$|t| \leqq \sqrt{2}$$

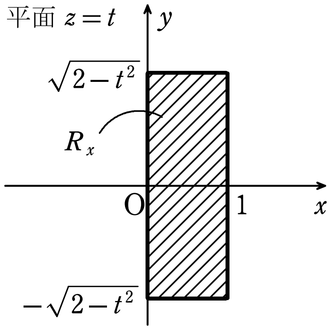
このとき，$y^2+z^2=2$ に $z=t$ を代入して，y について解くと

$$y=\pm\sqrt{2-t^2}$$

ゆえに，P_x を平面 $z=t$ $(|t| \leqq \sqrt{2})$ で切ったときの切り口 R_x は，右の図の斜線部分のように，2 辺の長さが

$$2\sqrt{2-t^2}, \quad 1$$

の長方形となる。

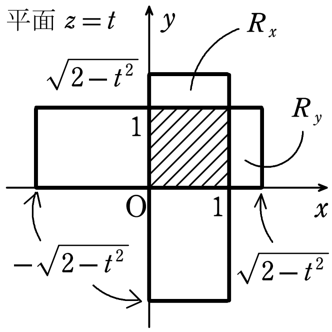


よって，R_x の面積は　　$2\sqrt{2-t^2}$
同様に，P_y を平面 $z=t$ $(|t| \leqq \sqrt{2})$ で切ったときの切り口 R_y も，2 辺の長さが

$$1, \quad 2\sqrt{2-t^2}$$

の長方形となる。
よって，R_y の面積も　　$2\sqrt{2-t^2}$
次に，R_x と R_y の共通部分の面積を求める。

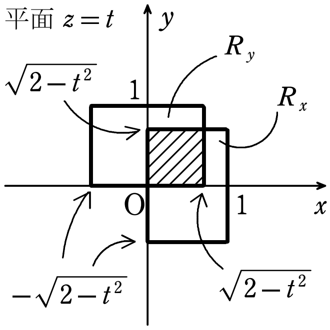
[1]　$\sqrt{2-t^2} \geqq 1$ すなわち $0 \leqq |t| \leqq 1$ のとき
平面 $z=t$ 上の切り口 R_x，R_y の共通部分は，右の図の斜線部分である。
よって，その面積は　　$1^2=1$



[2] $\sqrt{2-t^2} \leqq 1$ すなわち $1 \leqq |t| \leqq \sqrt{2}$ のとき

平面 $z=t$ 上の切り口 R_x, R_y の共通部分は，右の図の斜線部分である。

よって，その面積は　$(\sqrt{2-t^2})^2 = 2-t^2$



(2)　$S(t) = (R_x \text{の面積}) + (R_y \text{の面積}) - (R_x \text{と} R_y \text{の共通部分の面積})$

であるから，(1) より

$0 \leqq |t| \leqq 1$ のとき　$S(t) = 4\sqrt{2-t^2} - 1$

$1 \leqq |t| \leqq \sqrt{2}$ のとき　$S(t) = 4\sqrt{2-t^2} + t^2 - 2$

(3)　立体 Q は平面 $z=0$ に関して対称であるから，求める体積を V とすると

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} S(t)\,dt \\
&= 2\int_0^{\sqrt{2}} S(t)\,dt \\
&= 2\int_0^1 (4\sqrt{2-t^2} - 1)\,dt + 2\int_1^{\sqrt{2}} (4\sqrt{2-t^2} + t^2 - 2)\,dt \\
&= 8\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-t^2}\,dt - 2\int_0^1 dt + 2\int_1^{\sqrt{2}} (t^2-2)\,dt
\end{aligned}
$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-t^2}\,dt$ の値は，半径 $\sqrt{2}$ の円の面積の $\dfrac{1}{4}$ 倍であるから

$$
\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-t^2}\,dt = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot(\sqrt{2})^2 = \frac{\pi}{2}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
V &= 8\cdot\frac{\pi}{2} - 2\Big[t\Big]_0^1 + 2\left[\frac{t^3}{3} - 2t\right]_1^{\sqrt{2}} \\
&= 4\pi - 2 + 2\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{2} - \frac{1}{3} + 2\right) \\
&= 4\pi + \frac{4}{3} - \frac{8\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}
$$

$\boxed{4}$ $\boxed{\text{解答}}$ (1) $y = \pm 2x$　(2) 略　(3) $y = -x + \sqrt{3}$, $y = x - \sqrt{3}$

(4) $p^2 + q^2 = 3$, $q \neq \pm 2p$

(1)　漸近線の方程式は　$x \pm \dfrac{y}{2} = 0$

すなわち　$y = \pm 2x$

(2)　$y = mx$ と C の方程式より y を消去すると　$x^2 - \dfrac{m^2}{4}x^2 = -1$

整理すると　$(m^2-4)x^2 - 4 = 0$

$m^2 - 4 = 0$ のとき，この方程式は解をもたないので，直線 $y = mx$ と曲線 C は共有点

をもたない。したがって，接することはない。

$m^2-4 \fallingdotseq 0$ のとき，この方程式は 2 次方程式で，その判別式を D とすると

$$D=16(m^2-4) \fallingdotseq 0$$

したがって，この 2 次方程式は重解をもたない。

よって，直線 $y=mx$ は曲線 C には接していない。

以上から，任意の実数 m に対して直線 $y=mx$ は曲線 C には接していない。

(3)　接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると，接線の方程式は

$$x_1x-\frac{y_1y}{4}=-1 \quad \cdots\cdots ①$$

直線 ① が点 $(\sqrt{3},\ 0)$ を通るから　　$\sqrt{3}\,x_1=-1$

よって　　$x_1=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　　$\cdots\cdots ②$

また，$(x_1,\ y_1)$ は C 上の点であるから　　${x_1}^2-\dfrac{{y_1}^2}{4}=-1$

これと ② より　　$y_1=\pm\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

ゆえに，求める接線の方程式は，① より　　$y=-x+\sqrt{3}$，$y=x-\sqrt{3}$

(4)　x 軸に垂直な直線は C の接線にならないから，点 P を通る接線の方程式は

$$y=k(x-p)+q$$

とおける。

これを双曲線の方程式 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=-1$ に代入して整理すると

$$(4-k^2)x^2+2k(kp-q)x+4-(kp-q)^2=0 \quad \cdots\cdots ③$$

直線 $y=k(x-p)+q$ が曲線 C に接するための条件は，③ が 2 次方程式となり，重解をもつことである。

$4-k^2 \fallingdotseq 0$ のとき，③ の判別式を D とすると　　$D=0$

ここで　　$\dfrac{D}{4}=k^2(kp-q)^2-(4-k^2)\{4-(kp-q)^2\}$

$$=4\{(p^2+1)k^2-2pqk+(q^2-4)\}$$

よって　　$k \fallingdotseq \pm 2$　かつ

$$(p^2+1)k^2-2pqk+(q^2-4)=0 \quad \cdots\cdots ④$$

したがって，点 P を通る C の接線がちょうど 2 本あり， 2 本の接線が直交するための条件は，④ が ± 2 でない異なる 2 つの実数解をもち，それらの積が -1 であることである。 2 つの解の積が -1 であるとき，④ は異なる 2 つの実数解をもつから，これらの条件は

$$(p^2+1)\cdot 2^2-2pq\cdot 2+(q^2-4) \fallingdotseq 0 \quad \cdots\cdots ⑤$$

$$(p^2+1)\cdot(-2)^2-2pq\cdot(-2)+(q^2-4) \fallingdotseq 0 \quad \cdots\cdots ⑥$$

$$\frac{q^2-4}{p^2+1}=-1 \quad \cdots\cdots ⑦$$

と同値である。

⑤ より　　$(2p-q)^2 \fallingdotseq 0$　　すなわち　　$q \fallingdotseq 2p$

⑥ より　　$(2p+q)^2 \fallingdotseq 0$　　すなわち　　$q \fallingdotseq -2p$

⑦ より　　$q^2-4=-p^2-1$　　すなわち　　$p^2+q^2=3$

よって，p，q の満たすべき条件は　　$p^2+q^2=3$，$q \fallingdotseq \pm 2p$

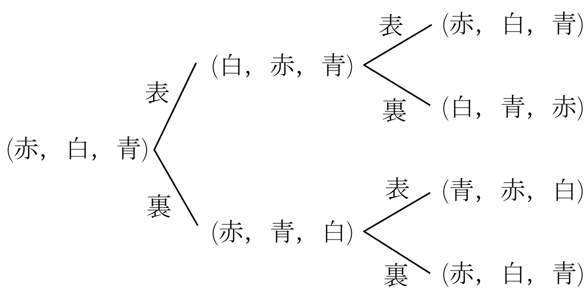
$\boxed{5}$ $\boxed{\text{解答}}$ (1)　$a_1=\dfrac{1}{2}$，$b_1=\dfrac{1}{2}$，$c_1=0$，$a_2=\dfrac{1}{2}$，$b_2=\dfrac{1}{4}$，$c_2=\dfrac{1}{4}$

(2)　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}b_n$，$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}c_n$，$c_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n+\dfrac{1}{2}c_n$

(3)　$a_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$，$b_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，

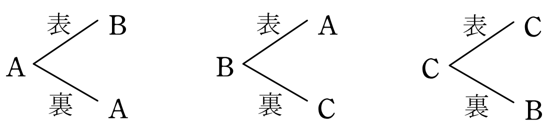
$c_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

(1)　A，B，C が持っている玉の状態を，A，B，C の順に (○，△，□) と表すことにすると，2 回の操作による A，B，C の玉の移動は，次のようになる。



したがって　　$a_1=\dfrac{1}{2}$，$b_1=\dfrac{1}{2}$，$c_1=0$，$a_2=\dfrac{1}{2}$，$b_2=\dfrac{1}{4}$，$c_2=\dfrac{1}{4}$

(2)　A，B，C が赤玉を持っているとき，硬貨の表裏の出方によって，赤玉の移動は次のようになる。



したがって　　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}b_n$，$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}c_n$，$c_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n+\dfrac{1}{2}c_n$

(3)　操作を n 回繰り返した後，A，B，C のいずれかが赤玉を持っているから，$a_n+b_n+c_n=1$ である。

(2) から　　$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+c_n)=\dfrac{1}{2}(1-b_n)$

ゆえに　　$b_{n+1}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{2}\left(b_n-\dfrac{1}{3}\right)$

数列 $\left\{b_n-\dfrac{1}{3}\right\}$ は，初項 $b_1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad よって \qquad b_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

次に，$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n$ …… ①

$c_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n$ …… ②

とする。

①－② から　$a_{n+1}-c_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n-c_n)$

数列 $\{a_n-c_n\}$ は，初項 $a_1-c_1=\frac{1}{2}$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n-c_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \cdots\cdots ③$$

また，$b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+c_n)$ から　$a_n+c_n=2b_{n+1}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ …… ④

(③＋④)÷2 から　$a_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

(④－③)÷2 から　$c_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$