$\boxed{1}$ 三角形 OAB の辺 AB を 1 : 2 に内分する点を C とする。動点 D は $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ $(x\geqq 1)$ を満たすとし，直線 CD と直線 OB の交点を E とする。

(1) 実数 y を $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定めるとき，次の等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=3$$

(2) 三角形 OAB の面積を S，三角形 ODE の面積を T とするとき，$\dfrac{S}{T}$ の最大値と，そのときの x を求めよ。

$\boxed{2}$ xy 平面上に，円 C : $x^2+y^2=1$ があり，C 上の異なる 2 点 P，Q を結んでできる直線 PQ に関して，C と対称な円を C' とする。

(1) C' の中心が第 1 象限にあり，C' が x 軸，y 軸のいずれとも接するとき，直線 PQ の方程式を求めよ。

(2) C' の中心が第 1 象限にあり，C' が x 軸と点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ で接するとき，直線 PQ の方程式を求めよ。

(3) C' が x 軸と点 $(a,\ 0)$ $(a>0)$ で接するとき，直線 PQ と x 軸との交点を R $(b,\ 0)$ とする。このとき，a のとりうる値の範囲と b の最小値を求めよ。

$\boxed{3}$ xyz 空間内の 6 つの平面 $x=0$，$x=1$，$y=0$，$y=1$，$z=0$，$z=1$ によって囲まれた立方体を P とおく。P を x 軸の周りに 1 回転してできる立体を P_x とし，P を y 軸の周りに 1 回転してできる立体を P_y とする。さらに，P_x と P_y の少なくとも一方に属する点全体でできる立体を Q とする。

(1) Q と平面 $z=t$ が交わっているとする。このとき，P_x を平面 $z=t$ で切ったときの切り口を R_x とし，P_y を平面 $z=t$ で切ったときの切り口を R_y とする。R_x の面積，R_y の面積，および R_x と R_y の共通部分の面積を求めよ。

(2) Q と平面 $z=t$ が交わっているとき，Q を平面 $z=t$ で切ったときの切り口の面積 $S(t)$ を求めよ。

(3) Q の体積を求めよ。

$\boxed{4}$ 双曲線 C : $x^2-\frac{y^2}{4}=-1$ について次の問いに答えよ。

(1) C の漸近線の方程式を求めよ。

(2) m を任意の実数として，直線 $y=mx$ が曲線 C に接していないことを示せ。

(3) 点 A $(\sqrt{3},\ 0)$ を通る C の接線の方程式をすべて求めよ。

(4) C 上にない点 P $(p,\ q)$ を通る C の接線がちょうど 2 本あって，2 本の接線が直交するとき，p，q が満たすべき条件を求めよ。

$\boxed{5}$ 初めに，A が赤玉を 1 個，B が白玉を 1 個，C が青玉を 1 個持っている。表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ の硬貨を投げ，表が出れば A と B の玉を交換し，裏が出れば B と C の玉を交換する，という操作を考える。この操作を n 回 $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ 繰り返した後に A，B，C が赤玉を持っている確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とおく。

(1) a_1，b_1，c_1，a_2，b_2，c_2 を求めよ。

(2) a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を a_n，b_n，c_n で表せ。

(3) a_n，b_n，c_n を求めよ。