1 解答　(1)（ア）4　（イ）23　（ウ）207　（エ）2070　(2)（オ）483
(3)（カ）7406　(4)（キ）328509

与えられた条件から，

$m=23k$，$n=23l$　（k，l は $k<l$ を満たす互いに素な自然数）

とおける。

(1)　$n=230$ のとき　$l=10$

k は l 未満で l と互いに素な自然数であるから，1，3，7，9 のいずれかである。

よって，m のとりうる値は $^{ア}4$ 個あり，最小のものは $m=23\times1={}^{イ}23$，最大のものは $m=23\times9={}^{ウ}207$ である。

$m=23\times9$ と $n=23\times10$ の最小公倍数は　$23\times10\times9={}^{エ}2070$

(2)　$11109=23^2\times21$ であるから　$kl=21$

これと $k<l$ を満たす互いに素な自然数 k，l は存在するから，m と n の最小公倍数は

$23kl=23\times21={}^{オ}483$

(3)　$7935=23^2\times15$ であるから　$kl<15$

これと $k<l$ を満たす互いに素な自然数 k，l のうち，kl が最大になる組は

$(k,\ l)=(1,\ 14),\ (2,\ 7)$

このとき　$mn=23^2\times14={}^{カ}7406$

(4)　$1150=23\times50$ であるから　$k+l=50$

$k<l$ であるから　$1\leqq k\leqq24$

$l=50-k$ であるから

$mn=23^2kl=23^2k(50-k)=23^2\{-(k-25)^2+625\}$

ゆえに，$1\leqq k\leqq24$ に対し，k が増加すると mn も増加する。

$k=24$ のとき，$l=26$ であり，k と l は互いに素ではないから，不適。

$k=23$ のとき，$l=27$ であり，k と l は互いに素である。

よって，mn のとりうる値で最大のものは

$23^2\times23\times27={}^{キ}328509$

2 解答　（ア）8　（イ）3　（ウ）3　（エ）2　（オ）2　（カ）3　（キ）4
（ク）5　（ケ）6

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-2$，$\alpha\beta=-2$

ゆえに　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2\cdot(-2)={}^{ア}8$

$x^2+2x-2=0$ を解くと　$x=-1\pm\sqrt{3}$

$\alpha>\beta$ より $\alpha=-1+\sqrt{3}$，$\beta=-1-\sqrt{3}$ であるから

$$\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\beta^3}=\frac{\beta^3-\alpha^3}{\alpha^3\beta^3}=\frac{(\beta-\alpha)^3+3\alpha\beta(\beta-\alpha)}{(\alpha\beta)^3}$$

$$=\frac{(-2\sqrt{3})^3+3\cdot(-2)\cdot(-2\sqrt{3})}{(-2)^3}=\frac{{}^{イ}3\sqrt{{}^{ウ}3}}{{}^{エ}2}$$

次に，$\alpha-\beta=2\sqrt{3}=\sqrt{12}$，$3<\sqrt{12}<4$ から

$p=2\sqrt{3}-3$

よって，$5p=10\sqrt{3}-15$ で　$10\sqrt{3}=\sqrt{300}$，$17^2<300<18^2$ から

$17<10\sqrt{3}<18$

ゆえに，$5p$ の整数部分は　$17-15={}^{オ}2$

さらに，$6\alpha=6\sqrt{3}-6$ で　$6\sqrt{3}=\sqrt{108}$，

$10^2<108<11^2$ から 6α の整数部分は　$10-6=4$

ゆえに，$4<6\alpha<5$ から

$n-2\leqq 4$　かつ　$5\leqq n+2$

よって　$n={}^{カ}3,\ {}^{キ}4,\ {}^{ク}5,\ {}^{ケ}6$

3 解答　(ア)　$-a$　(イ)　$2a^2-2a+1$　(ウ)　-1　(エ)　$3-2\sqrt{3}$　(オ)　1

$f(x)=-x^2-2ax+a^2-2a+1$ とおくと

$$f(x)=-(x+a)^2+2a^2-2a+1$$

$-2<a<1$ であるから　$-1<-a<2$

よって，関数 ① は，$x={}^{ア}-a$ のとき最大値 $f(-a)={}^{イ}2a^2-2a+1$ をとる。

関数 ① の最大値が 5 となるとき

$$2a^2-2a+1=5$$

整理すると　$a^2-a-2=0$　すなわち　$(a+1)(a-2)=0$

$-2<a<1$ から，$a={}^{ウ}-1$ である。

また，関数 ① の最小値が負であるとき，x の範囲 $-1\leqq x\leqq 2$ の中央の値が $x=\dfrac{1}{2}$ であるから

[1]　$-a\leqq\dfrac{1}{2}$　すなわち　$-\dfrac{1}{2}\leqq a<1$ のとき

最小値は　$f(2)=a^2-6a-3$

よって，$a^2-6a-3<0$ から　$3-2\sqrt{3}<a<3+2\sqrt{3}$

$-\dfrac{1}{2}\leqq a<1$ との共通範囲を求めて　$3-2\sqrt{3}<a<1$

[2]　$-a>\dfrac{1}{2}$　すなわち　$-2<a<-\dfrac{1}{2}$ のとき

最小値は，$f(-1)=a^2$ であるが，$a^2<0$ を満たす a は存在しない。

[1], [2] から，a のとり得る値の範囲は，${}^{エ}3-2\sqrt{3}<a<{}^{オ}1$ である。

4 解答　(ア)　-13　(イ)　$4n-17$　(ウ)　4　(エ)　$4x^2-4x^{n+1}$

$a_1=S_1=2\cdot 1^2-15\cdot 1={}^{ア}-13$

$n\geqq 2$ のとき，$a_n=S_n-S_{n-1}$ であるから

$$a_n=(2n^2-15n)-\{2(n-1)^2-15(n-1)\}=4n-17$$

よって　$a_n=4n-17$

これに $n=1$ を代入すると，$a_1=-13$ であるから，$n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに　$a_n={}^{イ}4n-17$

また　　$S_n=2n^2-15n=2\left(n-\frac{15}{4}\right)^2-\frac{225}{8}$

n は自然数であるから，S_n が最小となるときの n の値は　　${}^{ウ}4$

$a_n=4n-17$ より，$b_n=(4n-17)x^n$ であるから

$$T_n=-13x-9x^2-5x^3+\cdots\cdots+(4n-17)x^n$$

$$xT_n=\qquad -13x^2-9x^3+\cdots\cdots+(4n-21)x^n+(4n-17)x^{n+1}$$

辺々を引いて

$$(1-x)T_n=-13x+4x^2+4x^3+\cdots\cdots+4x^n-(4n-17)x^{n+1}$$

よって，$x\fallingdotseq 1$ のとき

$$T_n=\frac{-13x-(4n-17)x^{n+1}}{1-x}+\frac{4x^2+4x^3+\cdots\cdots+4x^n}{1-x}$$

$$=\frac{-13x-(4n-17)x^{n+1}}{1-x}+\frac{1}{1-x}\cdot\frac{4x^2(1-x^{n-1})}{1-x}$$

$$=\frac{-13x-(4n-17)x^{n+1}}{1-x}+\frac{{}^{エ}4x^2-4x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

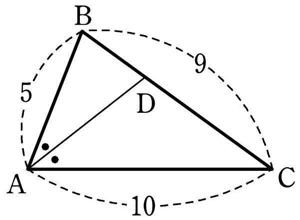
5 解答　(1)　(ア)　3　　(イ)　6　　(ウ)　13　　(エ)　15

(2)　(オ)　4　　(カ)　2　　(キ)　2　　(ク)　3　　(ケ)　1　　(コ)　3　　(サ)　22

(3)　(シ)　0　　(ス)　25　　(セ)　12

(1)　AD は ∠A の二等分線であるから

BD：DC＝AB：AC＝5：10＝1：2



よって　　$\mathrm{BD}=\frac{1}{3}\mathrm{BC}={}^{ア}3$

$\mathrm{DC}=\frac{2}{3}\mathrm{BC}={}^{イ}6$

△ABCにおいて，余弦定理から

$$\cos C=\frac{9^2+10^2-5^2}{2\cdot9\cdot10}=\frac{156}{2\cdot9\cdot10}=\frac{{}^{ウ}13}{{}^{エ}15}$$

(2)　△ACD において，余弦定理から

$$\mathrm{AD}^2=\mathrm{CA}^2+\mathrm{CD}^2-2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{CD}\cos C$$

$$=10^2+6^2-2\cdot10\cdot6\cdot\frac{13}{15}=32$$

$\mathrm{AD}>0$ であるから　$\mathrm{AD}=\sqrt{32}={}^{オ}4\sqrt{{}^{カ}2}$

D は辺 BC を 1：2 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{1+2}=\frac{{}^{キ}2}{{}^{ク}3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{{}^{ケ}1}{{}^{コ}3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\quad\cdots\cdots ①$$

$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$$

よって　　$9^2=10^2-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+5^2$　　　　ゆえに　　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}={}^{サ}22$　$\cdots\cdots ②$

(3)　AC⊥EC であるから　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EC}}={}^{シ}0$

点 E は直線 AD 上にあるから　$\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AD}$ (k は実数)

よって，① から　$\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{3}k\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}k\overrightarrow{AC}$

ゆえに　$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}$

$$=\overrightarrow{AC}-\left(\frac{2}{3}k\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}k\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=-\frac{2}{3}k\overrightarrow{AB}+\left(1-\frac{1}{3}k\right)\overrightarrow{AC}$$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EC}=0$ であるから

$$\overrightarrow{AC}\cdot\left\{-\frac{2}{3}k\overrightarrow{AB}+\left(1-\frac{1}{3}k\right)\overrightarrow{AC}\right\}=0$$

よって　$-2k\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+(3-k)|\overrightarrow{AC}|^2=0$

ゆえに，② から　$-44k+100(3-k)=0$

よって　$k=\dfrac{25}{12}$

ゆえに　$\overrightarrow{AE}=\dfrac{^{ス}25}{_{セ}12}\overrightarrow{AD}$