1 解答　(1)（ア）5　（イ）6　(2)（ウ）5　（エ）5　（オ）10　（カ）2
（キ）5　（ク）3　（ケ）5

(1)　$a_{n+1}=2a_n+5\cdot3^n$ の両辺を 3^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a_n}{3^n}+\dfrac{5}{3}$

$\dfrac{a_n}{3^n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=\dfrac{2}{3}b_n+\dfrac{5}{3}$

これを変形すると　$b_{n+1}-5=\dfrac{2}{3}(b_n-5)$

また　$b_1-5=\dfrac{a_1}{3}-5=1-5=-4$

よって，数列 $\{b_n-5\}$ は初項 -4，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列であるから

$b_n-5=-4\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$　ゆえに　$b_n=5-4\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

したがって　$a_n=5\cdot3^n-4\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot3^n={}^{ア}5\cdot3^n-{}^{イ}6\cdot2^n$

(2)　$a_{n+2}+10a_{n+1}+25a_n=0$ を変形すると　$a_{n+2}+5a_{n+1}=-5(a_{n+1}+5a_n)$

よって　$\alpha={}^{ウ}5$，$\beta=-{}^{エ}5$

$b_n=a_{n+1}+5a_n$ であるから　$b_{n+1}=-5b_n$

また　$b_1=a_2+5a_1=5+5\cdot1=10$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 10，公比 -5 の等比数列であるから

$b_n={}^{オ}10\cdot(-5)^{n-1}$　ゆえに　$a_{n+1}=-5a_n+10\cdot(-5)^{n-1}$

両辺を $(-5)^{n+1}$ で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{(-5)^{n+1}}=\dfrac{a_n}{(-5)^n}+\dfrac{2}{5}$

また　$\dfrac{a_1}{-5}=-\dfrac{1}{5}$

よって，数列 $\left\{\dfrac{a_n}{(-5)^n}\right\}$ は初項 $-\dfrac{1}{5}$，公差 $\dfrac{2}{5}$ の等差数列であるから

$\dfrac{a_n}{(-5)^n}=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}(n-1)=\dfrac{2}{5}n-\dfrac{3}{5}$

したがって　$a_n=\dfrac{{}^{カ}2}{{}^{キ}5}\cdot n\cdot(-5)^n-\dfrac{{}^{ク}3}{{}^{ケ}5}\cdot(-5)^n$

$\boxed{2}$ 解答　(ア)　$ax-\frac{1}{2}a^2$　　(イ)　$\frac{a(2b+1)}{a^2+1}$　　(ウ)　$\frac{a^2b+a^2-b}{a^2+1}$　　(エ)　$\frac{a^2-1}{2a}x+\frac{1}{2}$

(オ)　0　　(カ)　$\frac{1}{2}$

ℓ は x 軸に垂直でないから，その方程式は $y=k(x-a)+\frac{1}{2}a^2$ とおける。

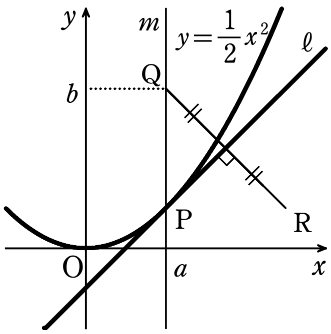
これと $y=\frac{1}{2}x^2$ から y を消去して　$\frac{1}{2}x^2=k(x-a)+\frac{1}{2}a^2$

整理すると　$x^2-2kx+2ak-a^2=0$

判別式を D とすると　$\frac{D}{4}=(-k)^2-(2ak-a^2)=(k-a)^2=0$

よって　$k=a$

したがって，ℓ の方程式は　$y=ax-\frac{1}{2}a^2$



R $(X,\ Y)$ とすると，QR の中点$\left(\frac{X+a}{2},\ \frac{Y+b}{2}\right)$が

ℓ 上にあるから　$\frac{Y+b}{2}=a\cdot\frac{X+a}{2}-\frac{1}{2}a^2$

整理すると　　$Y=aX-b$　……①

QR⊥ℓ であるから　$\frac{Y-b}{X-a}\cdot a=-1$

整理すると　$X+aY=a(b+1)$　……②

①，② を解くと　$X=\frac{a(2b+1)}{a^2+1}$，$Y=\frac{a^2b+a^2-b}{a^2+1}$

よって，点 R の座標は　$\left(\frac{a(2b+1)}{a^2+1},\ \frac{a^2b+a^2-b}{a^2+1}\right)$

したがって，直線 n の方程式は　$y-\frac{1}{2}a^2=\dfrac{\frac{a^2b+a^2-b}{a^2+1}-\frac{1}{2}a^2}{\frac{a(2b+1)}{a^2+1}-a}(x-a)$

すなわち　$y=\frac{a^2-1}{2a}x+\frac{1}{2}$

この直線は a の値によらず，常に定点$\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$を通る。

3 解答　（ア）$\left(\dfrac{3}{4},\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{7}{4}\right)$　（イ）$\left(\dfrac{8}{7},\ \dfrac{2}{7},\ \dfrac{4}{7}\right)$　（ウ）$\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$　（エ）$\dfrac{3\sqrt{21}}{2}$

（オ）3

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ $(s+t+u=1)$ と表される．

すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s(1,\ 2,\ 0)+t(2,\ 0,\ -1)+u(0,\ -2,\ 4)$
$=(s+2t,\ 2s-2u,\ -t+4u)$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ (k は実数) と表される．

すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k(3,\ -2,\ 7)=(3k,\ -2k,\ 7k)$

よって　$s+2t=3k,\ 2s-2u=-2k,\ -t+4u=7k$

$s,\ t,\ u$ を k で表すと　$s=k,\ t=k,\ u=2k$

$s+t+u=1$ であるから　$k+k+2k=1$　　よって　$k=\dfrac{1}{4}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\dfrac{3}{4},\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{7}{4}\right)$　　ゆえに　$\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{4},\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{7}{4}\right)$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s'\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t'\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u'\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ $(s'+t'+u'=1)$ と表される．

また，垂線 OH は △ABC に垂直であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(s'+2t',\ 2s'-2u',\ -t'+4u'),\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ -2,\ -1),\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ -4,\ 4)$
であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=s'+2t'-2(2s'-2u')-(-t'+4u')$
$=-3s'+3t'$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-(s'+2t')-4(2s'-2u')+4(-t'+4u')$
$=-9s'-6t'+24u'$

よって　$-3s'+3t'=0,\ -9s'-6t'+24u'=0$

ゆえに　$t'=s',\ u'=\dfrac{5}{8}s'$

$s'+t'+u'=1$ であるから　$s'+s'+\dfrac{5}{8}s'=1$　　よって　$s'=\dfrac{8}{21}$

このとき　$t'=\dfrac{8}{21},\ u'=\dfrac{5}{21}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\dfrac{8}{7},\ \dfrac{2}{7},\ \dfrac{4}{7}\right)$　　ゆえに　$\mathrm{H}\left(\dfrac{8}{7},\ \dfrac{2}{7},\ \dfrac{4}{7}\right)$

また　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|=\dfrac{2}{7}\sqrt{4^2+1^2+2^2}=\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$

更に　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{6\cdot 33-3^2}=\dfrac{3\sqrt{21}}{2}$

よって，四面体 OABC の体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{OH}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{21}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{21}}{7}=3$$

4 解答　（ア）30　（イ）12　（ウ）6　（エ）12　（オ）10

(1)　$\dfrac{5!}{2!2!}={}^{ア}30$ (通り)

(2)　隣り合う AA をまとめて A' で表すと，求める並べ方は，A'，B，B，X の順列であるから　$\dfrac{4!}{2!}={}^{イ}12$ (通り)

(3)　隣り合う AA をまとめて A'，BB をまとめて B' で表すと，求める並べ方は，A'，B'，X の順列であるから　$3!={}^{ウ}6$ (通り)

(4)　(2) と同様に，B と B が隣り合う並べ方は　12 通り
これと (1)，(3) により，求める並べ方は

$$30-12\times2+6={}^{エ}12 \text{ (通り)}$$

(5)　○ 3 個，B 2 個を 1 列に並べ，3 個の ○ は左から A，X，A とすればよいから

$$\frac{5!}{3!2!}={}^{オ}10 \text{ (通り)}$$

$\boxed{5}$ 解答 （ア） 0　（イ） -9　（ウ） 3　（エ） -48　（オ） 165　（カ） 18
（キ） 1　（ク） -6　（ケ） 12

放物線 A は，2 点 $(11,\ 0)$，$(5,\ 0)$ を通るから，その方程式は $y=a(x-11)(x-5)$ とおける．

すなわち　$A:y=ax^2-16a+55a$

よって　$b=-16a$，$c=55a$ …… ①

このとき，放物線 B の方程式は　$y=a(x+8-11)(x+8-5)+d$

すなわち　$y=ax^2-9a+d$

B の頂点の座標は　$(0,\ -9a+d)$

ゆえに　$-9a+d=-9$ …… ②

また，放物線 A の方程式は $y=a(x-8)^2-9a$ となるから，頂点の座標は　$(8,\ -9a)$

よって，$\dfrac{-9a+9}{8-0}=-\dfrac{9}{4}$ であるから　$a=3$

①，② から　$b=-48$，$c=165$，$d=18$

また，2 頂点を結んだ直線の方程式は　$y=-\dfrac{9}{4}x-9$

放物線 B の方程式は　$y=3x^2-9$

長方形と放物線 B の接点のうち，x 座標が正となる点の座標を $(x,\ 3x^2-9)$ とおくと

$S=2x(9-3x^2)=-6x^3+18x\ (0<x<\sqrt{3})$

$S'=-18x^2+18=-18(x+1)(x-1)$

$0<x<\sqrt{3}$ における S の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$
S'		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，S は $x=1$ のとき最大値 12 をとる．

このとき，接点の座標は　$(1,\ -6)$